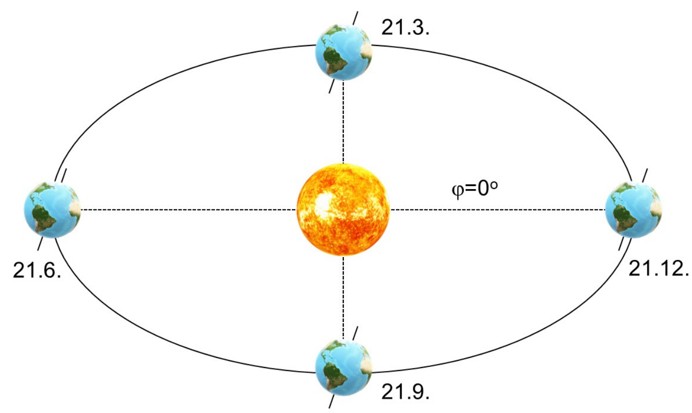
Die Bahn der Sonne

Im Osten geht die Sonne auf,
nach Süden nimmt sie ihren Lauf,
im Westen wird sie untergeh'n,
im Norden ist sie nie zu seh'n.

So lernen wir es als Kinder und stellen es auch immer wieder fest. Die Sonne beschreibt eine scheinbare Bahn am Himmel, weil die Erde sich dreht. Auch steigt die Sonne auf ihrer Bahn im Winter weniger hoch als im Sommer, was auf die Schrägstellung der Erdachse zurückzuführen ist. Wir lernen ein Modell des Planetensystems von außen zu betrachten, in dem die Erde auf annähernd einer Kreisbahn um die Sonne läuft und die Erde sich täglich einmal um ihre schräggestellte Achse dreht. Aber wie komplizierte mathematische Modelle braucht es, um nachzurechnen und zu simulieren, wie die Bahn der Sonne über dem Horizont [1] von einer festen Position auf der Erde aussieht?

Entwicklung meiner Modellrechnung

Tag und Stunde



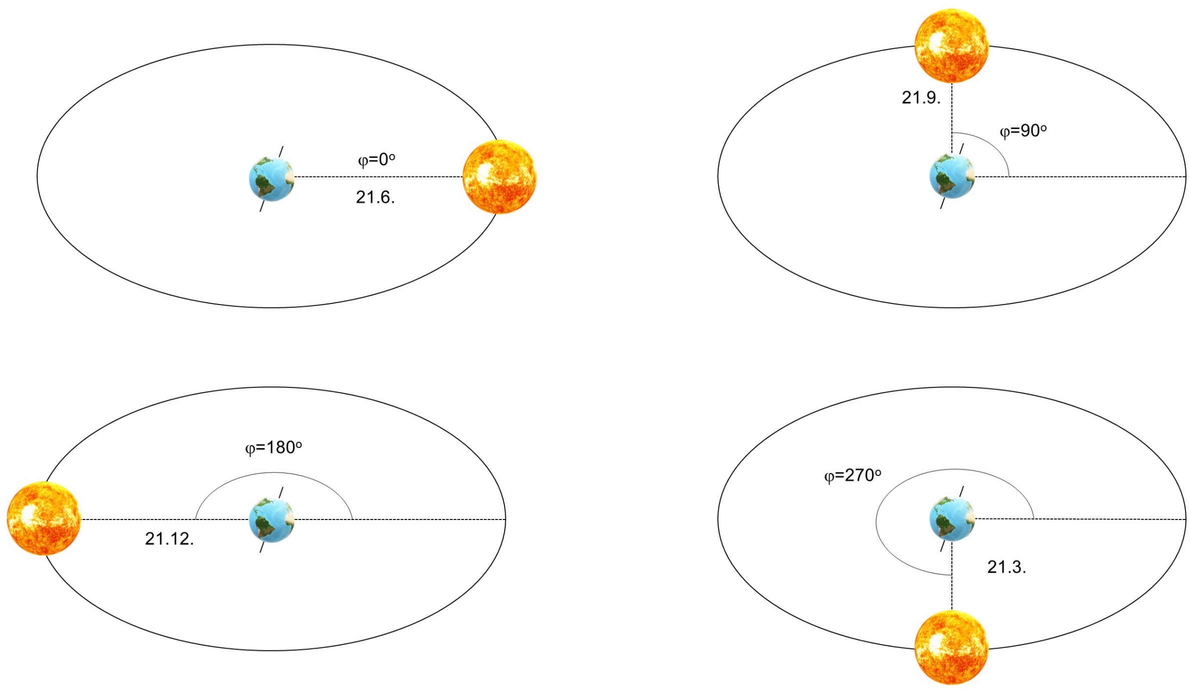
Bahn der Erde um die Sonne

Es geht um die relative Position der Sonne zu einem Ort auf der Erde. Mit Koordinaten und Richtungen auf der Erde wird es schwierig genug werden. Daher sei der Erdmittelpunkt im Koordinatenursprung platziert. Die Sonne positionieren wir je nach Jahreszeit in einer bestimmten Richtung von der Erde aus. Ein Ort auf der Erde ist bestimmt durch seinen Längengrad (der hier keine Rolle spielen wird) und seinen Breitengrad, z.B. Konstanz 9°11″ östlicher Länge, 47°40″ nördlicher Breite. Abweichungen der wahren Sonnenzeit von der mittleren Sonnenzeit (Annalemma) bleiben unberücksichtigt. Die Erde beschreibe mit immer gleichbleibender Geschwindigkeit eine Kreisbahn um die Sonne. Daraus mache ich aber jetzt eine Kreisbahn der Sonne um die Erde. Der Winkel φ wird dabei durch den Tag im Jahr festgelegt. Der Einfachheit halber habe das Jahr 365 Tage. Der 21.Juni ist bei $\varphi = 0°$. φ wird für alle anderen Tage im Jahr berechnet. Streng genommen sind dann der 21.September $\varphi = 90.74°$, der 21.Dezember $\varphi = 180.49°$ und der 21.März $\varphi = 269.26°$. Der 21.Juni ist der 172.Tag im Jahr. Für den n.ten Tag im Jahr ist dann

$$\varphi = (n - 172)/365 \cdot 360° = (n - 172)/365 \cdot 2\pi$$

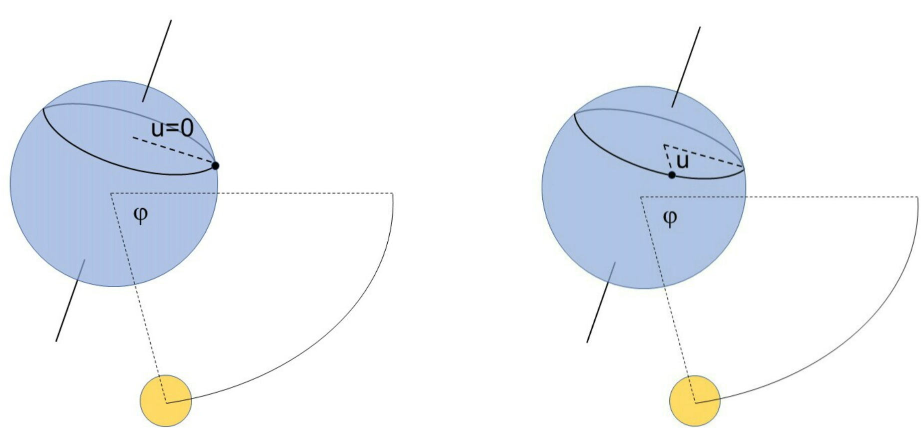
[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Sonnenstand
http://www.wissenschaft-schulen.de/sixcms/media.php/1308/WIS-2018-08-USMSOS-Sonnenbahn.pdf
https://www.sunearthtools.com/dp/tools/pos_sun.php?lang=de
geogebra.org/m/ePsWkNgN (Andreas Lindner)
www.sonnenverlauf.de

φ kommt so negativ heraus vom 1.Januar bis 20.Juni. Das macht beim Aufrufen der Winkelfunktionen Sinus und Cosinus aber keinen Unterschied. Außerdem nehme ich fürs Rechnen mit einem Programm in Fortran Winkel gleich im Bogenmaß.



Winkel φ, der die Stellung der Sonne zur Erde je nach Tag im Jahr angibt.

Das Vorrücken der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne bzw. jetzt das Vorrücken der Sonne auf ihrer Bahn um die Erde beträgt weniger als 1 Grad pro Tag. Für den jeweiligen Tag bleibe die Sonne fest an der errechneten Position. Damit entfällt der Unterschied zwischen Sonnenzeit und Sternzeit. Die Erde dreht sich dann während eines Tages genau einmal um sich selber, und zwar sowohl in bezug auf den Fixsternhimmel als auch in bezug auf die Sonne. Der Winkel für die Erdrotation heiße u. Ein Ort auf der Erde bewegt sich bei der täglichen Rotation der Erde quasi einmal herum auf seinem Breitenkreis. Da die Erdachse schräg steht (23.44° von der z-Richtung aus), verändert sich dabei seine Höhe (z-Koordinate) in unserem Modell. Der Nullpunkt $u = 0$ bedeute, dass der Ort seinen tiefsten Punkt erreicht hat. Das ist aber nicht immer dieselbe Tageszeit, da 12 Uhr Mittags der Punkt sein soll, an dem der Ort zur Sonne zeigt.



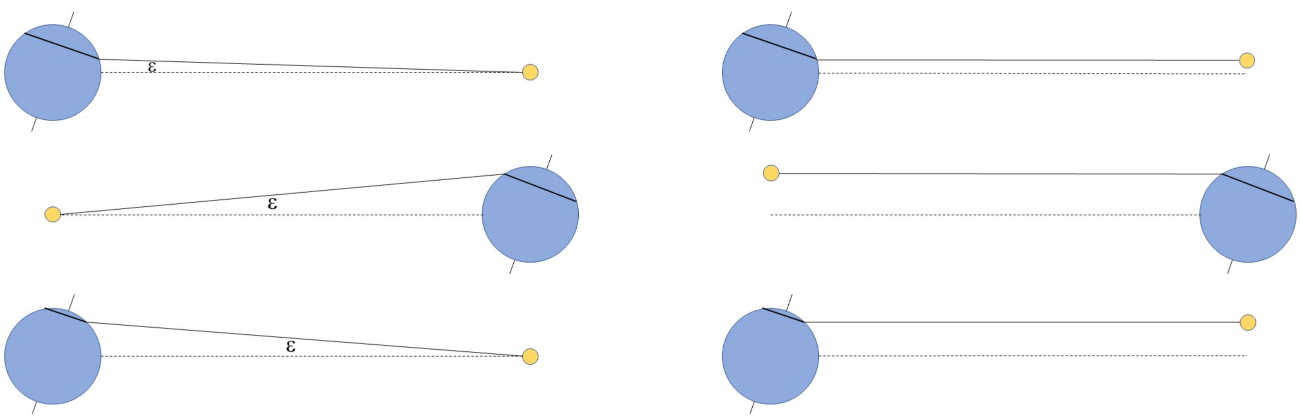
Winkel der täglichen Erddrehung für einen Ort auf einem Breitenkreis
in tiefster Stellung und an der Position, die zur Sonne zeigt.

Man ahnt, dass wegen der Schrägstellung der Erdachse u mittags und φ nicht ganz identisch sein könnten. Außerdem muss für einen Ort der sonnennächste Punkt auf der täglichen Tour entlang des Breitenkreises nicht der Punkt sein, wo die Sonne für den Beobachter auf der Erde genau im Süden steht; wenn nicht gerade Sommer- oder Wintersonnenwende ist, liegen in den Bildern die Verbindungslinien zwischen Sonne und Erde nicht in der Ebene eines Meridiankreises. Trotzdem ist es sinnvoll, $u = \varphi$ als 12 Uhr Mittags festzulegen. Die Zeit ist so die gleichmäßig verstreichende mittlere Sonnenzeit. Unser Tagesnullpunkt 12 Uhr mittags wird so über ein Jahr hinweg gleichmäßig in 365 Teilen von $u = 0$ bis $u = 2\pi$ versetzt.

$$u = (\text{Zeit in Stunden} - 12)/24 \cdot 2 \cdot \pi + \varphi$$

Auch bei u sind in Winkelfunktionen gleichwertige negative Werte kein Problem.
Für ein u wird exakt die Südrichtung berechnet werden sowie die Projektion des Sonnenstands auf die Himmelsrichtungen. Am Ende kann dann die Frage gestellt werden, ob die Genauigkeit ausreicht, eventuell einen Unterschied zwischen der Mittagszeit und dem Sonnenstand in Südrichtung bzw. dem höchsten Sonnenstand über dem Horizont zu sehen.

Position der Sonne

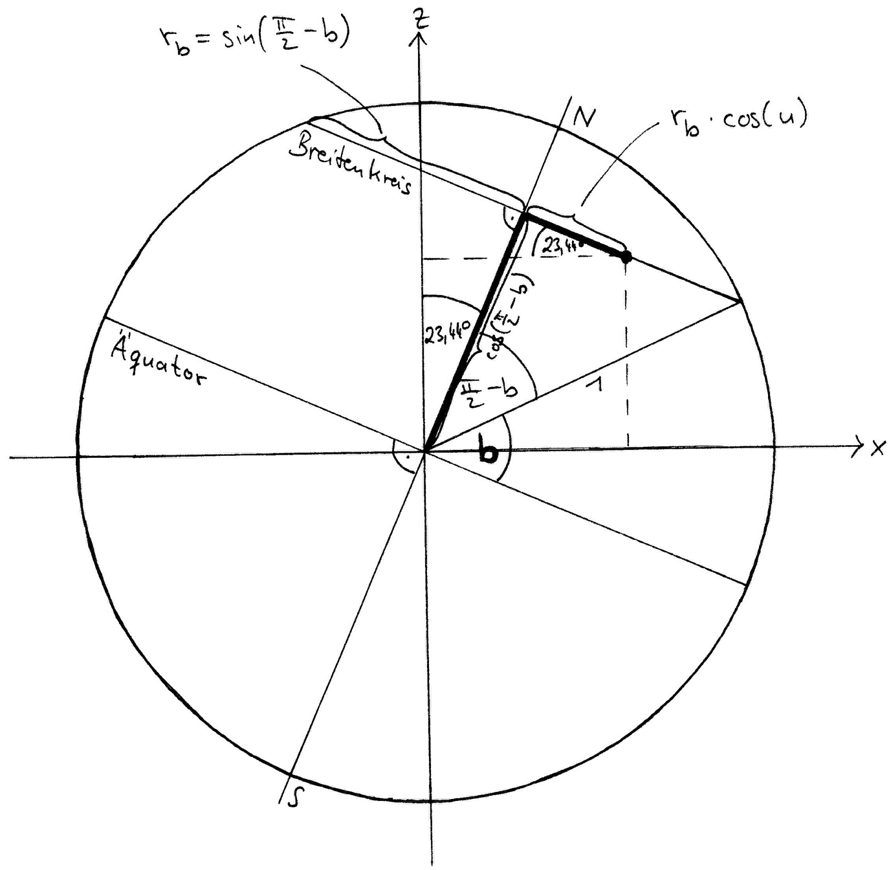


Auch wenn wir die Sonne als kleine Kreisscheibe am Himmel sehen, sie ist riesig im Vergleich zur Erde und sehr weit weg. Sonnenlicht ist parallel. Ob wir die Sonne in der Rechnung als Punkt in der xy-Ebene nehmen oder jeweils auf der Höhe (z-Koordinate) unseres Orts auf der Erde, spielt keine Rolle. Winkel ε wie in der linken Zeichnung machen für unser Anliegen keinen Sinn. Eine analoge Überlegung gilt für die xy-Koordinaten der Sonne. Wegen ihrer enormen Entfernung zur Erde im Vergleich zu Größe der Erde ist es egal, ob wir ihre Position vom Erdmittelpunkt aus oder von einem Punkt auf der Erdoberfläche aus angeben. Wo immer wir sind auf der Erde, können wir sagen, die Sonne befindet sich in der Ebene parallel zur xy-Ebene durch unseren Standpunkt und im Winkel φ, also in Verlängerung des Vektors $\overrightarrow{\text{sun}} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$ von unserem Standpunkt aus.

Mein Standort

Da wir die z-Achse unseres Koordinatensystems senkrecht zur Ekliptikalebene belassen haben, müssen wir jetzt die Position eines Orts auf der Erdoberfläche in diesem Koordinatensystem berechnen. Es sei so skaliert, dass die Erde den Radius eins hat. Und wie schon gezeigt, ist der Erdmittelpunkt der Ursprung. Der Breitenkreis bei Breite b (b ist ein Winkel) hat den Radius $r_b = \sin(\pi/2 - b) = \cos(b)$. Sein Mittelpunkt auf der Erdachse hat vom Erdmittelpunkt den Abstand $\cos(\pi/2 - b) = \sin(b)$. In der Ebene des Breitenkreises würden wir einen Punkt auf diesem Kreis mit $(r_b \cdot \cos(u), r_b \cdot \sin(u))$ angeben. Die y-Koordinate bleibt unverändert durch die Schrägstellung der Erdachse. Aber für die x- und die z-Koordinate müssen die in der Zeichnung dick markierten Strecken projiziert werden. Da b für eine Rechnung als festgelegt gelten soll, werden die kartesischen Koordinaten als Funktion von u notiert:

$$\begin{aligned} x(u) &= \sin(b) \cdot \sin(23.44°) + \cos(b) \cdot \cos(u) \cdot \cos(23.44°) \\ y(u) &= \cos(b) \cdot \sin(u) \\ z(u) &= \sin(b) \cdot \cos(23.44°) - \cos(b) \cdot \cos(u) \cdot \sin(23.44°) \end{aligned}$$



kartesische Koordinaten eines Punkts auf Breitenkreis b bei Zeitkoordinate u

Höhen- und Azimutwinkel

Mein Standort auf der Erde ist (x, y, z). Von dort aus befindet sich die Sonne in Richtung φ. Wir können sie an die Position $(x + \cos(\varphi), y + \sin(\varphi), z)$ legen. Dann ist der Differenzvektor zu meinem Standort der Einheitsvektor $\overrightarrow{\mathrm{sun}} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$. Da wir die Erde als die Einheitskugel um den Ursprung genommen haben, lautet der Normalenvektor auf die Erdoberfläche an meinem Standort, also der Zenitvektor, ebenfalls (x, y, z) und dieser ist auch ein Einheitsvektor. Der Cosinus des Winkels ζ der Sonne zum Zenit ist also das Skalarprodukt dieser beiden Einheitsvektoren. Ich möchte diesen Wert $faktor$ nennen.

$$\cos(\zeta) = x(u) \cdot \cos(\varphi) + y(u) \cdot \sin(\varphi) + z(u) \cdot 0 = faktor(u)$$

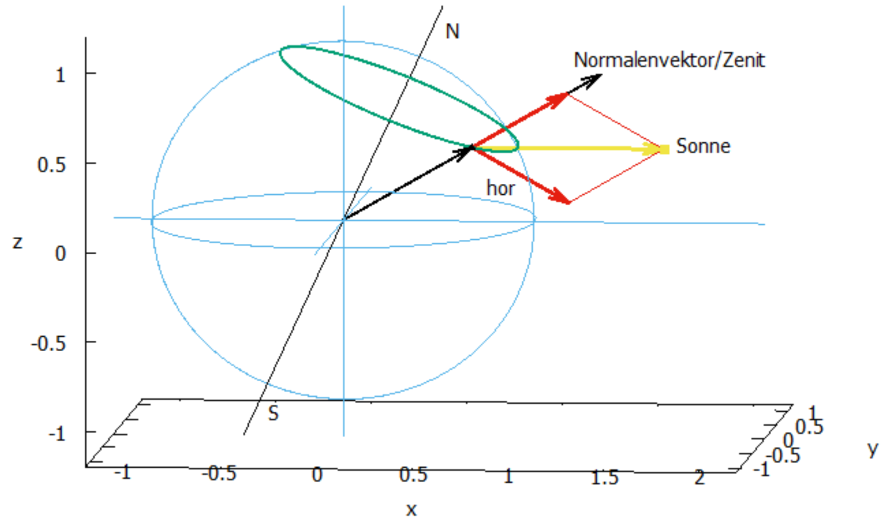
Der Höhenwinkel h ist das Komplement von ζ zu 90° oder zu $\pi/2$ im Bogenmaß. x, y und z sind natürlich Funktionen von u, meiner mittleren Sonnenzeit, geblieben. ζ und h sind das auch.

$$h = 90° - \zeta = \pi/2 - \arccos(faktor(u))$$

ζ kann größer als $\pi/2$ sein. Dann wird h negativ, d.h. die Sonne steht unter dem Horizont und ist nicht zu sehen.

$faktor \cdot (x, y, z)$ ist die Projektion des Vektors von meinem Standort zur Sonne auf den Normalenvektor. Wenn wir diesen Teil vom Vektor zur Sonne subtrahieren, bleibt der Teil in der Horizontebene, also ein Vektor in der Berührebene an die Erdkugel an meinem Standort. Dieser Differenzvektor heiße $\overrightarrow{hor}$ wie "Vektor zum Horizont".

$$\overrightarrow{hor} = (\cos(\varphi) - faktor(u) \cdot x(u)\,,\, \sin(\varphi) - faktor(u) \cdot y(u)\,,\, -faktor(u) \cdot z(u))$$



Vektor vom Standort zur Sonne (gelb) und seine Projektionen auf den Normalenvektor und die Horizontebene (rot). ζ ist der Winkel zwischen dem Vektor zur Sonne und dem Normalenvekor. Die roten Pfeile und Linien bilden im Raum ein Rechteck. *hor* zeigt hier schräg nach unten hinten in der Berührebene an die Erdkugel (durch die blauen Kreise angedeutet). Ebenfalls in blau eingezeichnet sind die Achsen meines Koordinatensystems durch den Ursprung, obwohl die Skalen am Rand zu finden sind. Grün eingezeichnet ist der Breitenkreis des Standorts.

$\overrightarrow{hor}$ ist im festen xyz-Koordinatensystem angegeben. Wir müssen aber wissen, welchen Winkel der Vektor an meinem Standort zur Südrichtung, also zum Meridian hat. Der Winkel zur Südrichtung ist der anzugebende Azimutwinkel. Wir könnten den Azimutwinkel ebenfalls über ein Skalarprodukt und den inversen Cosinus ermitteln, wenn wir den Vektor am Standort in die Südrichtung hätten. Wegen der Schrägstellung der Erdachse liegen die Meridiankreise aber nicht in Ebenen senkrecht zur xy-Ebene. Einfach anschaulich komme ich hier nicht weiter. Daher folgende Überlegung: Der Meridiankreis liegt in der Ebene, die von der Erdachse und dem Ortsvektor aufgespannt wird. Der Vektor, der in dieser Ebene senkrecht zum Normalenvektor (=Ortsvektor) steht, ist der Vektor zum Südhorizont. Wir projizieren also den Vektor vom Erdmittelpunkt zum Südpol auf den Ortsvektor und ziehen diesen Teil vom Vektor Erdmittelpunkt-Südpol ab. Der Vektor, der übrig bleibt, hat die Richtung vom Standort zum Südhorizont.

Vektor Erdmittelpunkt-Südpol: $(-\sin(23.44°), 0, -\cos(23.44°))$

Das Skalarprodukt mit dem Ortsvektor heiße *suedproj* (Projektionsfaktor des Südpols):

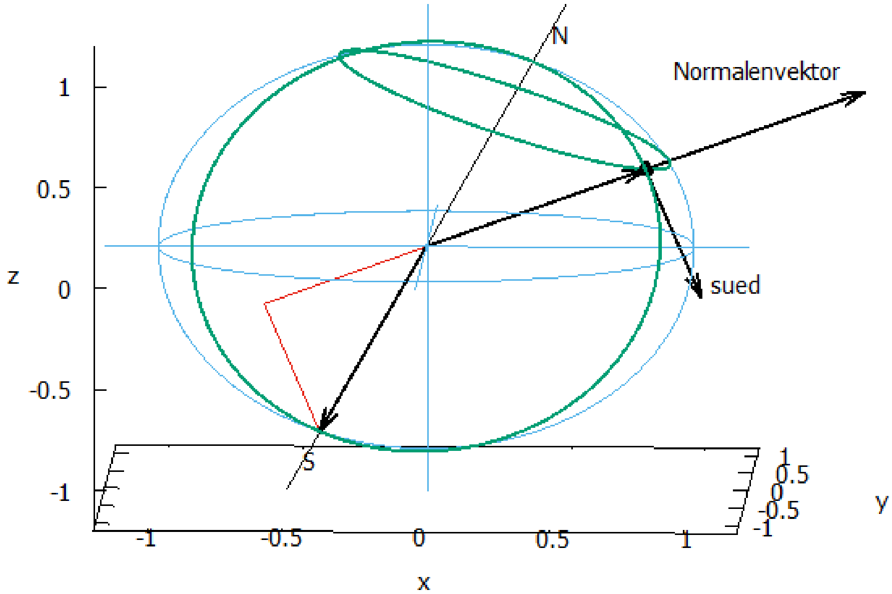
$$suedproj = -\sin(23.44°) \cdot x(u) + 0 \cdot y(u) - \cos(23.44°) \cdot z(u)$$

Der Differenzvektor sei mit $\overrightarrow{sued}$ bezeichnet und ergibt:

$$\overrightarrow{sued} = (-\sin(23.44°) - suedproj(u) \cdot x(u)\,,\, -suedproj(u) \cdot y(u)\,,\, -\cos(23.44°) - suedproj(u) \cdot z(u))$$

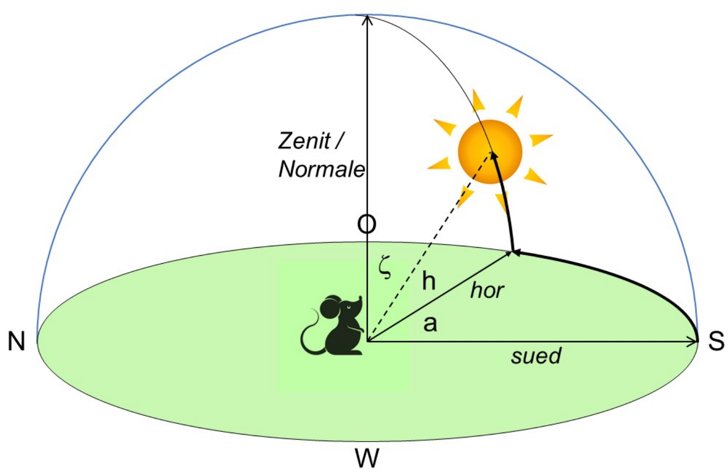
Die Vektoren jetzt im Spiel sind keine Einheitsvektoren mehr. Wir bilden außer dem Skalarprodukt noch die Beträge. Der Zusammenhang mit dem gesuchten Azimutwinkel a lautet

$$\overrightarrow{hor} \cdot \overrightarrow{sued} = |\overrightarrow{hor}| \cdot |\overrightarrow{sued}| \cdot \cos(a) \qquad \Rightarrow \qquad a = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{hor} \cdot \overrightarrow{sued}}{|\overrightarrow{hor}| \cdot |\overrightarrow{sued}|}\right)$$



Zur Ermittlung der Südrichtung: in grün der Breitenkreis und der Meridiankreis. Die roten Linien deuten die Zerlegung des Vektors vom Erdmittelpunkt zum Südpol in Teile entlang des Normalenvektors und in Südrichtung an.

Die Rechenmethode wirft das Problem auf, dass wir über die inverse Cosinusfunktion keine negativen Winkel erhalten und nicht unterscheiden können, ob die Sonne noch östlich oder schon westlich von der Südrichtung steht. Blicken wir als Beobachter am Standort auf der Erde Richtung Süden. Die Frage ist dann, ob die Projektion des Vektors zur Sonne auf die Horizontebene links oder rechts von uns liegt. $\overrightarrow{hor}$ und $\overrightarrow{sued}$ liegen beide in der Horizontebene. Ihr Vektorprodukt ergibt einen Vektor in Richtung der Normale, also entlang des Ortsvektors. Der Vektorproduktvektor zeigt parallel zum Normalenvektor, wenn $\overrightarrow{hor}$ rechts bzw. westlich von $\overrightarrow{sued}$ liegt, und antiparallel, wenn $\overrightarrow{hor}$ links bzw. östlich von $\overrightarrow{sued}$ liegt. Wir bilden also das Vektorprodukt $\overrightarrow{hor} \times \overrightarrow{sued}$ und dann das Skalarprodukt $(\overrightarrow{hor} \times \overrightarrow{sued}) \cdot (x, y, z)$, nur um dessen Vorzeichen festzustellen und es a mitzugeben.



Horizontsystem mit Azimutwinkel a und Höhenwinkel h

Damit ist mein Verfahren abgeschlossen, für eine geographische Breite b und einen Tag im Jahr, parametrisiert durch φ, den Azimutwinkel $a(u)$ und den Höhenwinkel $h(u)$ des Sonnenstands als Funktionen der gleichmäßig verlaufenden Tageszeit u zu ermitteln.

Programm

Das folgende FORTRAN-Programm produziert Datenfiles zur Darstellung mit gnuplot.

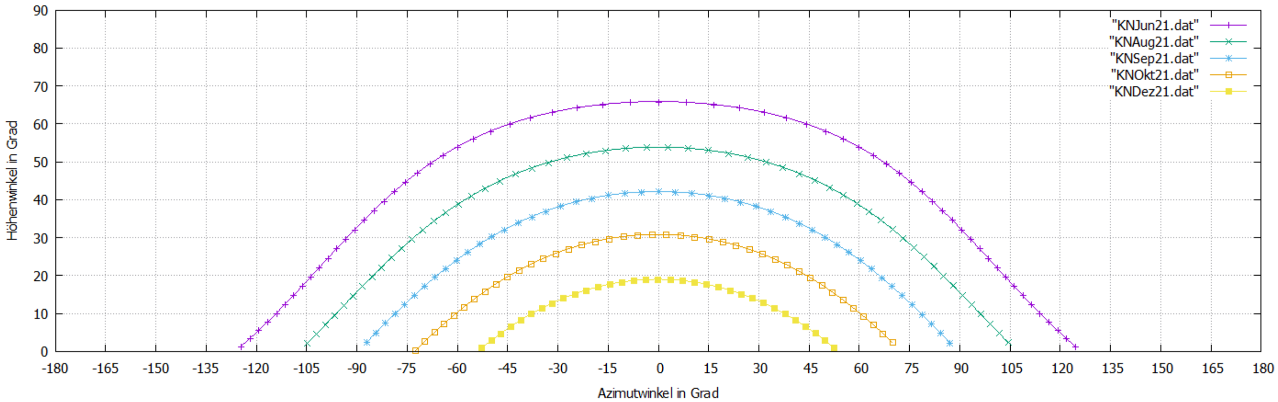
```
program sonnenlauf
! für die Nordhalbkugel
! phi=0 entspricht dem 21.Juni = 172ster Tag im Jahr
! u=0 entspricht 12 Uhr minus phi
implicit none

integer, dimension(12):: monattage
integer io_error,monat,tag,k,tagimjahr,stunde,kmax
real pi,phi,u,breite,b,x,y,z,schraeg,faktor,suedproj,a,aricht,usteph,ustep,halt
real horx,hory,horz,horbetrag,h,suedx,suedy,suedz,suedbetrag,vekpx,vekpy,vekpz

pi=4.0*atan(1.0)
monattage(1)=31
monattage(2)=28
monattage(3)=31
monattage(4)=30
monattage(5)=31
monattage(6)=30
monattage(7)=31
monattage(8)=31
monattage(9)=30
monattage(10)=31
monattage(11)=30
monattage(12)=31
schraeg=23.44/180.0*pi

open(unit=11,file='sonneah.dat',status='unknown',action='write',iostat=io_error)

print*, "Breitengrad angeben (Grad noerdlicher Breite)"
read(*,*) breite
b=breite/180.0*pi
print*, "Monat eingeben (Zahl von 1 bis 12)"
read(*,*) monat
print*, "Tag eingeben (Zahl von 1 bis 31)"
read(*,*) tag
tagimjahr=0
do k=1,monat-1
tagimjahr=tagimjahr+monattage(k)
enddo
tagimjahr=tagimjahr+tag
phi=real(tagimjahr-172)/365.0*2.0*pi
print*, "Zeitintervall? als Kommazahl in Stunden"
read(*,*) usteph
ustep=usteph/24.0*2.0*pi
kmax=int(24.0/usteph)
halt=-1.0
```

```
do k=1,kmax
u=real(k)*ustep-pi+phi
! nur fuers Plotten mit Linien bei 0 Uhr anfangen und nicht irgendwo

x=sin(b)*sin(schraeg)+cos(u)*cos(b)*cos(schraeg)
y=sin(u)*cos(b)
z=sin(b)*cos(schraeg)-cos(u)*cos(b)*sin(schraeg)
faktor=x*cos(phi)+y*sin(phi)
horx=cos(phi)-faktor*x
hory=sin(phi)-faktor*y
horz=-faktor*z
horbetrag=(horx*horx+hory*hory+horz*horz)**0.5
h=pi/2.0-acos(faktor)
suedproj=-sin(schraeg)*x-cos(schraeg)*z
suedx=-sin(schraeg)-suedproj*x
suedy=-suedproj*y
suedz=-cos(schraeg)-suedproj*z
suedbetrag=(suedx*suedx+suedy*suedy+suedz*suedz)**0.5
vekpx=hory*suedz-horz*suedy
vekpy=horz*suedx-horx*suedz
vekpz=horx*suedy-hory*suedx
aricht=vekpx*x+vekpy*y+vekpz*z
if (aricht.ge.0.0) then
a=acos((horx*suedx+hory*suedy+horz*suedz)/horbetrag/suedbetrag)
else
    a=-acos((horx*suedx+hory*suedy+horz*suedz)/horbetrag/suedbetrag)
endif

! zum Plotten Höhenwinkel gegen Azimutwinkel:
 if (h.ge.0.0) write(11,*), a/pi*180.0,h/pi*180.0
! fuer räumliche Darstellung im Horizontsystem:
! if (h.ge.0.0) write(11,*) sin(a)*cos(h),cos(a)*cos(h),sin(h)
! fuer Position der Sonne in meinem Koordinatensystem
! if (h.ge.0.0) write(11,*) x+cos(phi),y+sin(phi),z

if ((halt.le.0.0).and.(h.ge.0.0)) print*,"Sonnenaufgang bei ",k*usteph," Stunden"
if ((halt.ge.0.0).and.(h.le.0.0)) print*,"Sonnenuntergang bei ",(k-1)*usteph," Stunden"
halt=h
enddo

close(unit=11)
end program sonnenlauf
```

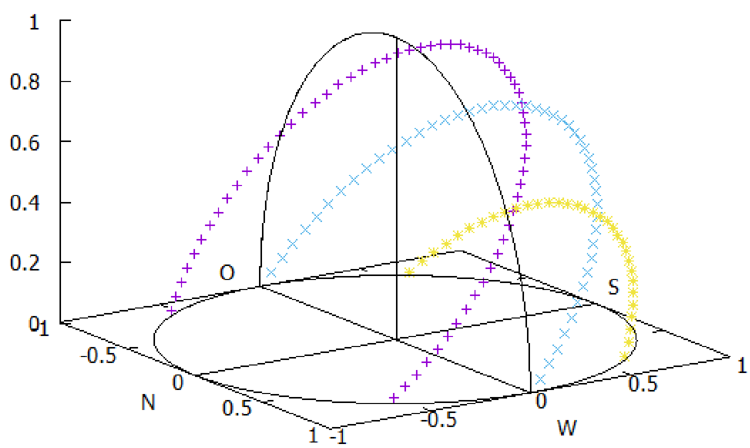
In den folgenden Abschnitten werden Ergebnisse der Rechnungen gezeigt.

In unseren Breiten

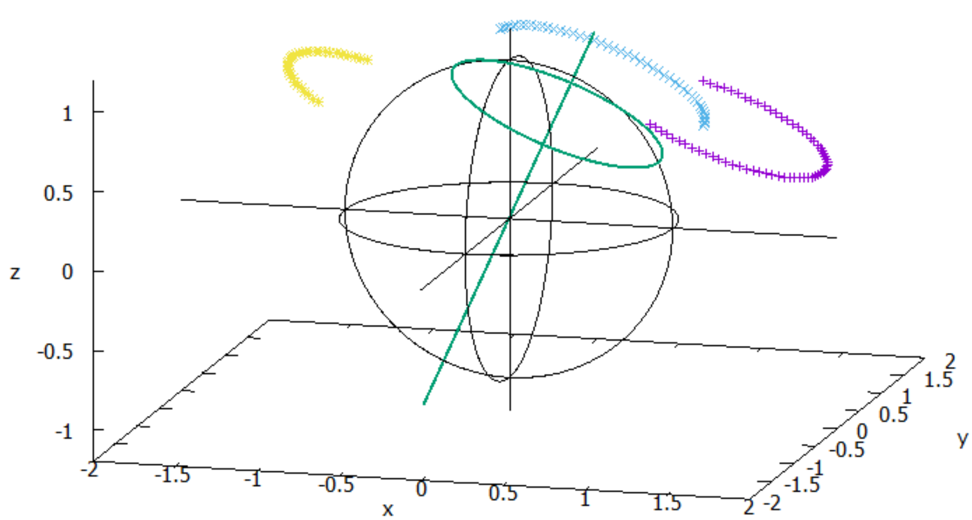
Die folgenden drei Abbildungen sind für 47.67° nördlicher Breite gemacht, also z.B. Konstanz.



Der Sonnenlauf aufgetragen als Höhenwinkel gegen Azimutwinkel für den 21.Juni, den 21.August, den 21.September, den 21.Oktober und den 21.Dezember. Die Punkte sind in Abständen einer Viertelstunde gesetzt.



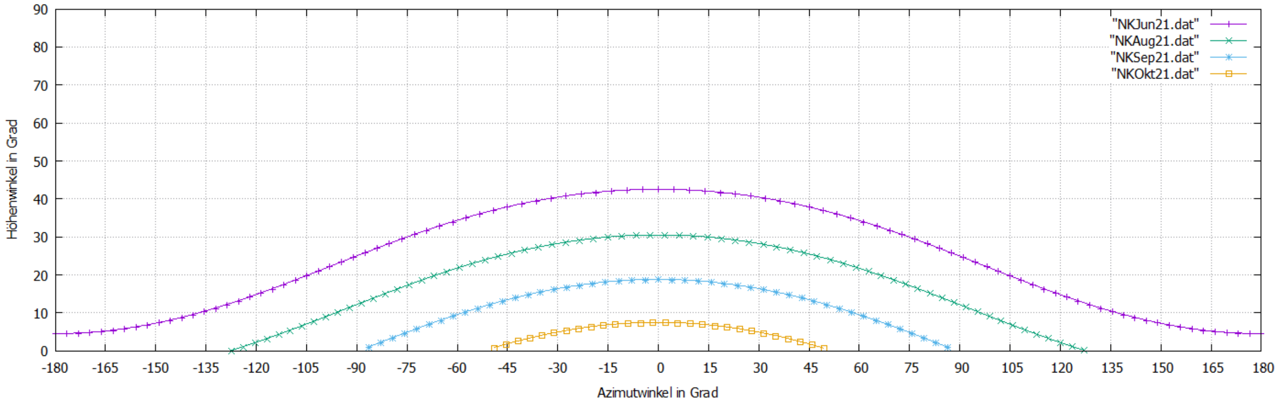
Der Sonnenlauf räumlich aufgetragen im Horizontsystem, also für einen Beobachter in der Mitte der Grundfläche, für den 21.Juni, den 21.September und den 21.Dezember (die Farben entsprechen der vorherigen Abbildung). Am 21.September geht die Sonne genau im Osten auf und im Westen unter, am 21.Juni davor bzw. dahinter, am 21.Dezember ist der Bogen hingegen kleiner. Azimutwinkel Null entspricht der Südrichtung.



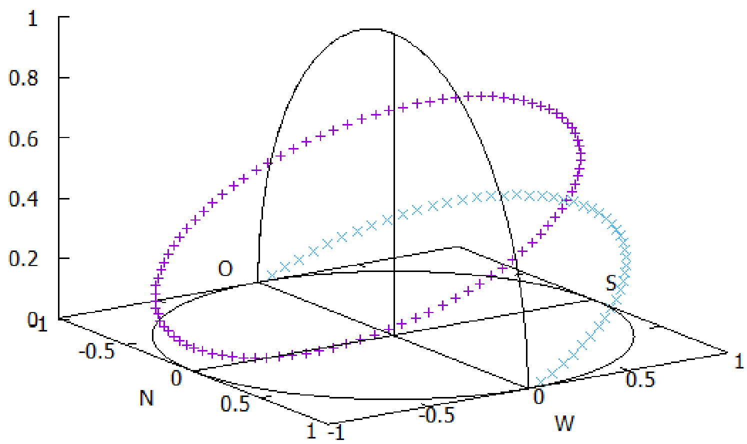
Der Sonnenlauf wie er sich für die drei Daten in meinem xyz-Koordinatensystem darstellt. Es sind nur die Teilstücke gezeichnet, auf denen die Sonne über dem Horizont zu sehen ist. Die Sonne ist jeweils einen Einheitsvektor in ihrer Richtung vom Beobachtungsort entfernt gesetzt und man beachte, dass sie in meinem Modell die z-Bewegung des Beobachtungsorts mitmacht. Die Erdkugel ist durch einen waagerechten und einen senkrechten Kreis um das Achsenkreuz angedeutet. Grün eingezeichnet sind die Erdachse und der Breitenkreis. Für den 21.März würde man für den Sonnenlauf einen Bogen vorne im Bild erhalten.

Mitternachtssonne und Polarnacht

Die folgenden drei Abbildung sind für 71° nördlicher Breite, z.B. etwa das Nordkap von Norwegen. Hier befinden wir uns nördlich des Polarkreises bei 66.56° nördlicher Breite (= 90°−23.44°).

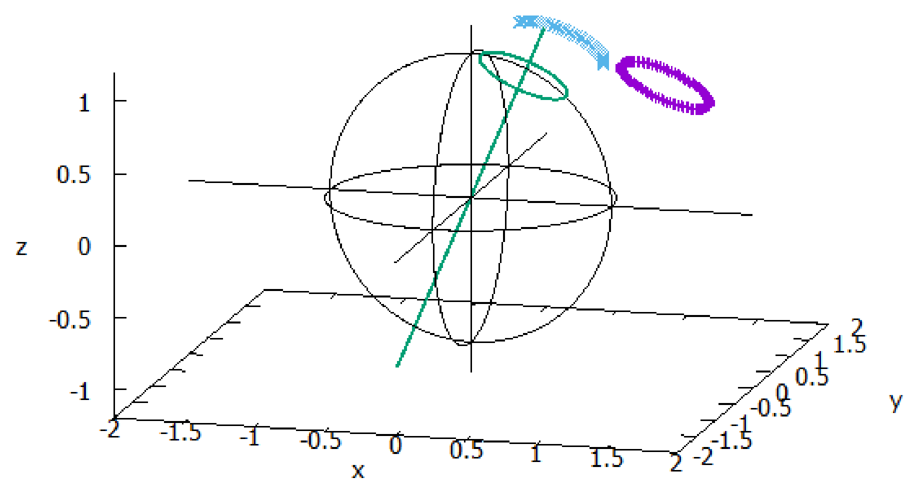


Der Sonnenlauf aufgetragen als Höhenwinkel gegen Azimutwinkel für den 21.Juni, den 21.August, den 21.September und den 21.Oktober.



Der Sonnenlauf aufgetragen im Horizontsystem für den 21.Juni und den 21.September (siehe Farben der vorherigen Abbildung).

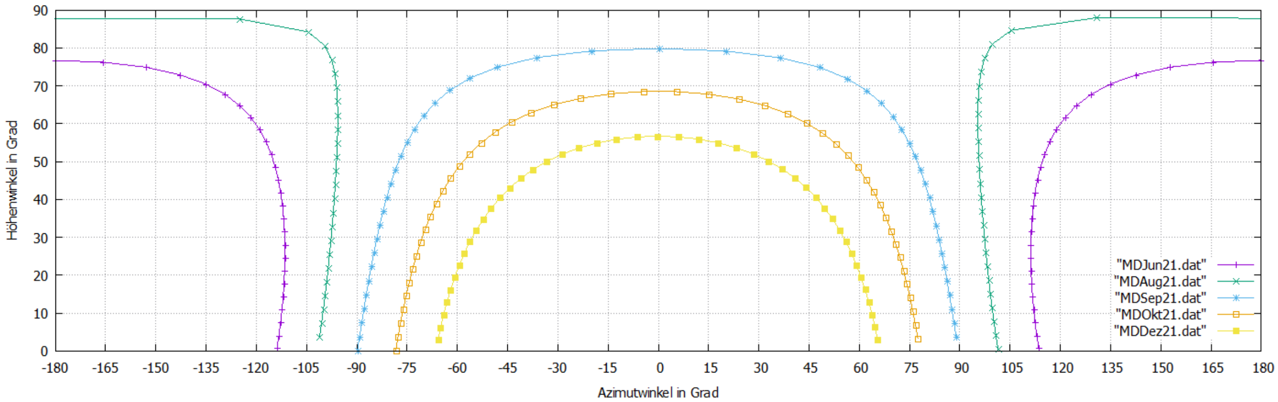
Der Sonnenlauf für den 21.Juni und den 21.September, wie er sich in meinem xyz-Koordinatensystem darstellt; nur für Zeiten, zu denen die Sonne über dem Horizont sichtbar ist.



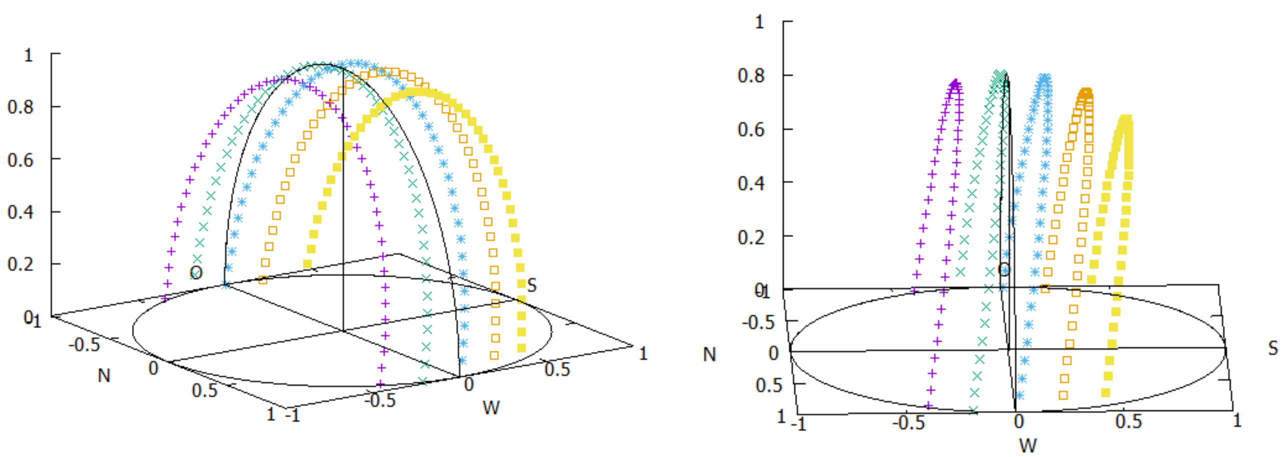
"Im Norden ist sie nie zu sehen" stimmt hier nicht mehr. In einer Zeitspanne um den 21.Juni herum scheint die Sonne über den Pol hinweg und vollführt eine geschlossene Bahn rundherum am Himmel (Mitternachtssonne). In einer Zeitspanne um den 21.Dezember hingegen kommt die Sonne auch tagsüber nicht über den Horizont (Polarnacht). Mit der Bedingung $h \geq 0$ enthält die Ausgabedatei in diesem Fall keine Punkte.

Jenseits des Wendekreises

Die folgenden drei Abbildungen sind für 10° nördlicher Breite, also etwa das nördliche Ende der Malediven. Dort befinden wir uns südlich des Wendekreises des Krebses bei 23.44°.

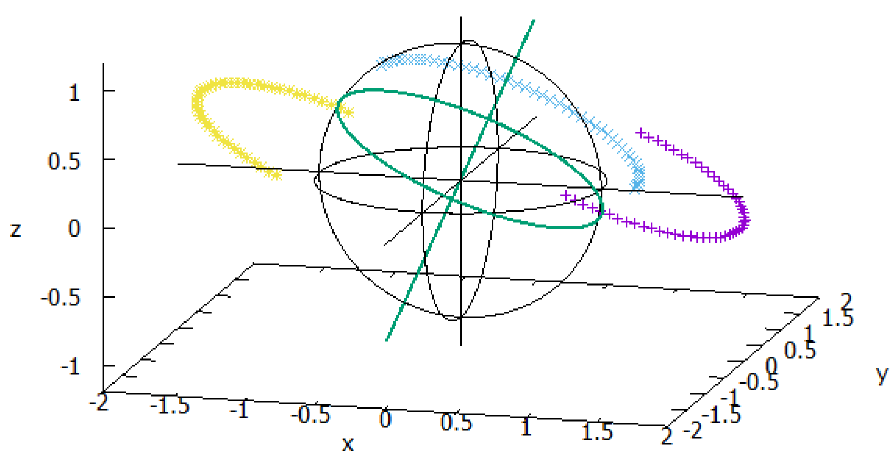


Der Sonnenlauf aufgetragen als Höhenwinkel gegen Azimutwinkel für den 21.Juni, den 21.August, den 21.September, den 21.Oktober und den 21.Dezember.



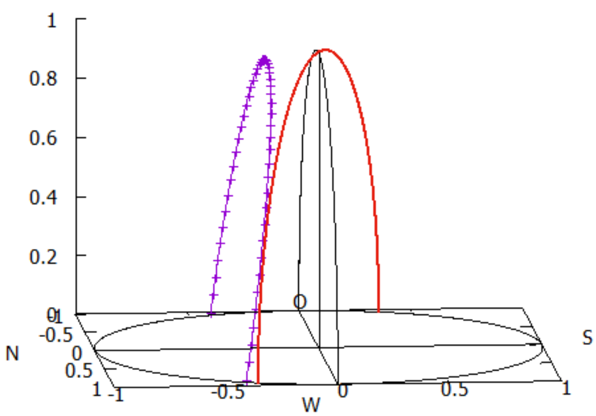
Der Sonnenlauf aufgetragen im Horizontsystem in zwei Perspektiven für den 21.Juni, den 21.August, den 21.September, den 21.Oktober und den 21.Dezember (Farben wie vorherige Abbildung).

Der Sonnenlauf für den 21.Juni, den 21.September und den 21.Dezember, wie er sich in meinem xyz-Koordinatensystem darstellt, für Zeiten, zu denen die Sonne über dem Horizont sichtbar ist.

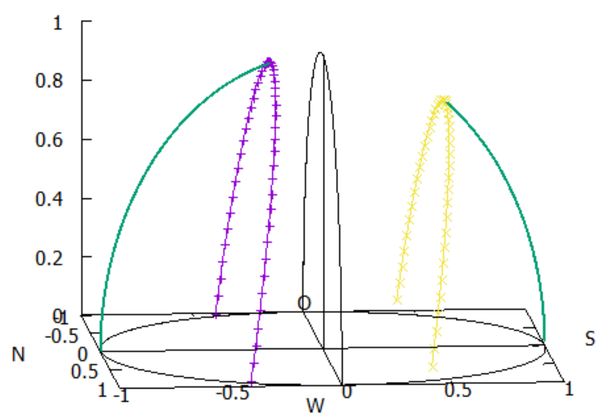


Die Auftragung des Höhenwinkels gegen den Azimutwinkel sieht merkwürdig aus. Am 21.Juni geht die Sonne bei einem Azimut von $-114°$ auf. Der Azimutwinkel läuft etwas auf Null zu bis $-111°$, kehrt aber dann ins Negative um. Er läuft mittags bei $-180°$ links aus dem Bild, um rechts bei $180°$ wieder aufzutauchen. Der Verlauf bis Sonnenuntergang ist spiegelbildlich zur ersten Tageshälfte. Für den 21.August zeigt sich bei der Breite von $10°$ noch das gleiche Phänomen, während für den 21.September in der Auftragung Höhenwinkel gegen Azimutwinkel der Bogen normal von links nach rechts verläuft.

Die Bögen räumlich im Horizontsystem an der Halbkugel über dem Beobachtungsort aufgetragen zeigen keine Abnormitäten. Dass der Sonnenaufgangspunkt weiter nördlich als die Ostrichtung und der Sonnenuntergangspunkt weiter nördlich als die Westrichtung liegt, ist noch keine Erklärung. Das gibt es in mittleren Breiten im Sommerhalbjahr auch. Aber der Bogen für den 21.Juni liegt komplett auf der Nordseite der Ostwest-Zenit-Ebene. Für den Azimutwinkel schauen wir, auf welchem Großkreis durch den Zenit auf der Halbkugel des Horizontsystems ein Punkt liegt. Für so einen Bogen, der komplett auf der Nordseite liegt (violette Kreuze) gibt es einen Großkreis durch den Zenit, der den Bogen nicht schneidet, sondern berührt (roter Halbkreis). Näher als dem roten Halbkreis entspricht, kann der Azimutwinkel nicht an Null kommen. Daran, dass die violetten Kreuze ab Sonnenaufgang sich zunächst so einem roten Halbkreis nähern, sich nach dem Berührpunkt jedoch wieder auf derselben Seite von ihm entfernen, versteht man, wie der Azimutwinkel zunächst ein wenig auf die Südrichtung (Null) hin wandern kann, dann aber in die andere Richtung läuft und schließlich über die Nordrichtung ($\pm180°$) seine Bahn vollendet. (Um die Perspektive vorheriger Abbildungen in etwa beizubehalten, ist hier der Berührgroßkreis auf der Sonnenuntergangsseite gezeigt, auf den die violetten Kreuze natürlich von oben zulaufen und dann bis zum Sonnenuntergang noch ein bisschen wieder weg.)



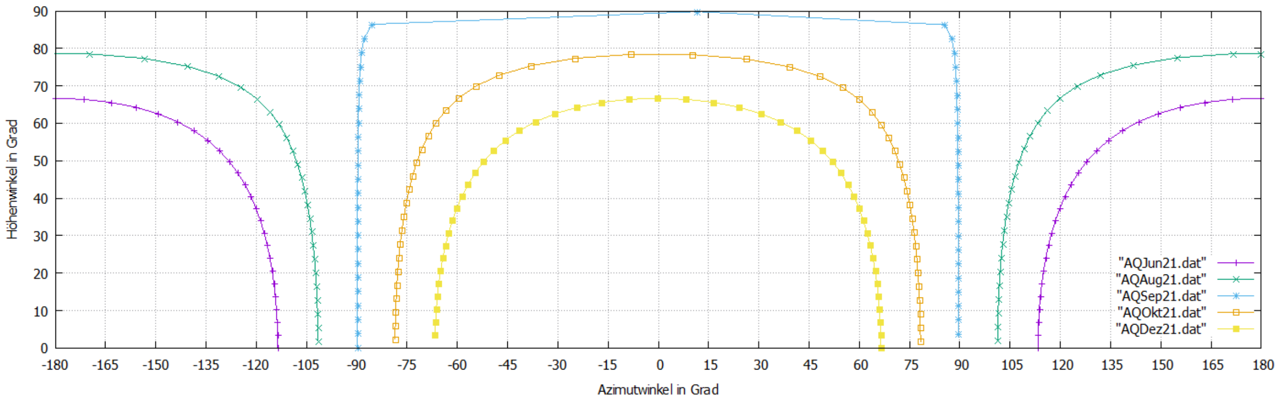
Großkreis durch den Zenit, der einen Sonnenlaufbogen komplett in der Nordhälfte gerade berührt.



Bögen, die die Höhenwinkel anzeigen, mittags am 21.Juni und am 21.Dezember.

Südlich des Wendekreises des Krebses steht die Sonne "höher" als der Zenit. Wenn man mittags am 21.Juni zunächst mit Blick Richtung Süden steht, muss man den Kopf mehr als 90 Grad nach hinten neigen, um die Sonne zu sehen, am höchsten Punkt des violetten Bogens. Man fragt sich, warum man nicht den Höhenwinkel Werte über $90°$ annehmen lässt. Am Berührpunkt des lila Bogens und roten Halbkreises kann man sich fragen, welchen Azimutwinkel man diesem Punkt zuordnen sollte. Ein Azimutwinkel nahe der Ostrichtung kurz vor Sonnenuntergang ist auch nicht sinnig. Der Höhenwinkel ist immer der kürzere Weg zum Horizont auf dem Großkreis durch den Zenit, wie durch die grünen Bögen für die Extremfälle 21.Dezember (gelb) mittags und 21.Juni (violett) mittags veranschaulicht.

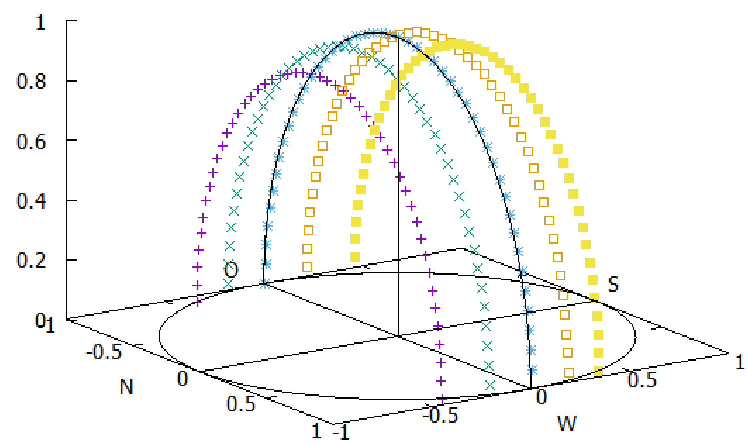
Kugelkoordinatensysteme sind so gemacht, dass man den Winkel in einer Ebene $360° = 2 \cdot \pi$ durchlaufen lässt (hier Azimutwinkel von $-180°$ bis $180°$) und den Winkel senkrecht dazu nur noch $180° = \pi$ (hier Höhenwinkel höchstens $90°$ über dem Horizont und höchstens $-90°$ unter dem Horizont). Es liegt also nur an der Definition der Winkel im Koordinatensystem, dass für Breiten zwischen den Wendekreisen der Sonnenlauf in der Auftragung Höhenwinkel gegen Azimutwinkel komische Umkehrer macht. Die Bögen am Himmel gehen sanft ineinander über.



Der Sonnenlauf am Äquator (Breite 0°) aufgetragen als Höhenwinkel gegen Azimutwinkel für den 21.Juni, den 21.August, den 21.September, den 21.Oktober und den 21.Dezember.

Für einen Standort auf dem Wendekreis (23.44° nördlicher Breite) berührt der Bogen für den 21.Juni gerade den Zenit (kein Bild).

Am Äquator (Breite 0°) stehen die Bögen senkrecht auf der Horizontebene. Dort gibt es kein Umkehren des Azimutwinkels mehr und die Tag- und Nachtgleichen im Herbst und im Frühjahr trennen die beiden Typen von Kurven in der Auftragung Höhenwinkel gegen Azimutwinkel.



Sonnenlauf im Horizontsystem am Äquator. (Die Farben gehören zu denselben Daten wie in der Abbildung vorher.)

Feinheiten

Es erübrigt sich, Sonnenläufe für das Halbjahr vom 21.Dezember bis zum 21.Juni zu zeichnen. Sie sind identisch mit den gezeigten, also z.B. der 21.März mit dem 21.September.

Betrachten wir die Auftragung Höhenwinkel gegen Azimutwinkel für die Breite 47.67° genauer. Für den 21.Juni, den 21.September und den 21.Dezember haben wir den höchsten Sonnenstand nach meiner Zeit um 12 Uhr (jeweils der mittlere höchste Punkt der Kurven). Für den 21.August und den 21.Oktober gibt es bei der Zeitauflösung hier von einer Viertelstunde eher zwei höchste Punkte. Diese sind nach meiner Zeit 12:00 Uhr und 12:15 Uhr für den 21.August und 11:45 Uhr und 12:00 Uhr für den 21.Oktober. Man kann das Programm mit einem kleineren Zeitschritt laufen lassen, aber die Abweichung vom höchsten Sonnenstand zu dem Punkt, den ich 12 Uhr mittags nennen, beträgt weniger als eine Viertelstunde. Noch zwei weitere Beispiele seien erwähnt, wo man mit dem Zeitschritt von einer Viertelstunde eher zwei Punkte in der Mitte der Sonnenlaufkurve als höchste Punkte erhält: Für den 21.Februar sind es ebenfalls die Punkte für 12:00 Uhr und 12:15 Uhr, für den 21.April ebenfalls die Punkte für 11:45 Uhr und 12:00 Uhr. Dieser kleine Effekt rührt eben daher, dass die Breitenkreisebene, in der u gemessen wird, schräg steht zur Ekliptikebene, in der φ gemessen wird, und es gar nicht so trivial ist, eine Mittagszeit zu definieren.

Am 21.Juni ist der Azimutwinkel beim höchsten Sonnenstand genau Null. Am 21.Dezember bis auf die zweite Stelle hinter dem Komma in Grad ebenso. Der 21.Dezember ist nicht ganz exakt gegenüber dem 21.Juni auf der Erdbahn, da es vom 21.Juni bis 21.Dezember 183 Tage sind, vom 21.Dezember bis zum 21.Juni jedoch nur 182 Tage (siehe oben, ich rechne mit 365 Tagen). An anderen Daten steht die Meridianebene mit der Südrichtung nicht senkrecht zur Ekliptikebene. Trotzdem stelle ich mit meiner Rechengenauigkeit, auch mit feinerem Zeitschritt, keine nennenswerte Abweichung der Position des höchsten Sonnenstands vom Azimut Null fest. Nach meiner dem Winkel u entsprechenden Zeit gibt es allerdings wie vorher erläutert eine kleine Differenz von unter einer Viertelstunde des höchsten Sonnenstands in Südrichtung von 12 Uhr mittags. Das ist die Abweichung meiner für eine überschaubare Modellrechnung gewählten gleichmäßig verlaufenden Zeit von der wahren Sonnenzeit, die für jedes Datum den wahren Mittag an die Position der Sonne genau im Süden legt.

Was ändert sich für die Südhalbkugel?

Mit einer negativen Breite b bleiben die Formeln für die Standortkoordinaten x, y und z unverändert. Ich habe aber eine Programmversion `suedhalbkugel` erstellt, in der ich die Breite als positive Zahl eingebe. In den Formeln heißt es daher $-b$. Der Vektor zur Sonne $(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$ bleibt unverändert. Auch dass ich es 12 Uhr mittags nenne, wenn $u = \varphi$ ist, bleibt.

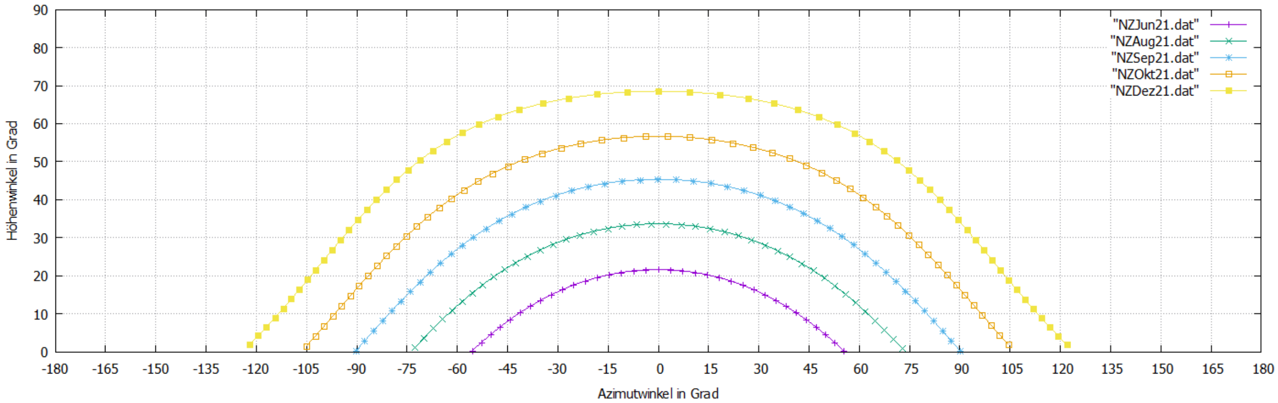
```
print*, "Breitengrad angeben (Grad suedlicher Breite)"
read(*,*) breite
b=breite/180.0*pi
...
x=sin(-b)*sin(schraeg)+cos(u)*cos(-b)*cos(schraeg)
y=sin(u)*cos(-b)
z=sin(-b)*cos(schraeg)-cos(u)*cos(-b)*sin(schraeg)
```

Die Projektion des Vektors zur Sonne auf den Normalenvektor (=Ortsvektor) und der Anteil in der Horizontebene als Differenz bleiben unverändert. Für die Südhalbkugel nimmt man sinnigerweise die Nordrichtung als Nullpunkt des Azimutwinkels. Entsprechend wird die Projektion des Vektors Erdmittelpunkt-Nordpol auf den Ortsvektor von diesem subtrahiert und $\overrightarrow{nord}$ ersetzt auch weiterhin im Programm dann $\overrightarrow{sued}$.

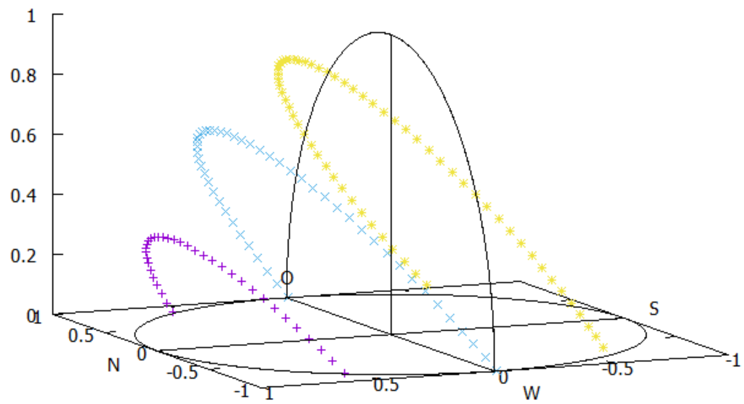
```
nordproj=sin(schraeg)*x+cos(schraeg)*z
nordx=sin(schraeg)-nordproj*x
nordy=-nordproj*y
nordz=cos(schraeg)-nordproj*z
```

An der Bedingung, dass der Horizontwinkel positiv sein muss, damit die Sonne über dem Horizont steht, ändert sich nichts.

Im Folgenden Rechnungen für 45° südlicher Breite, z.B. für die Südinsel von Neuseeland.

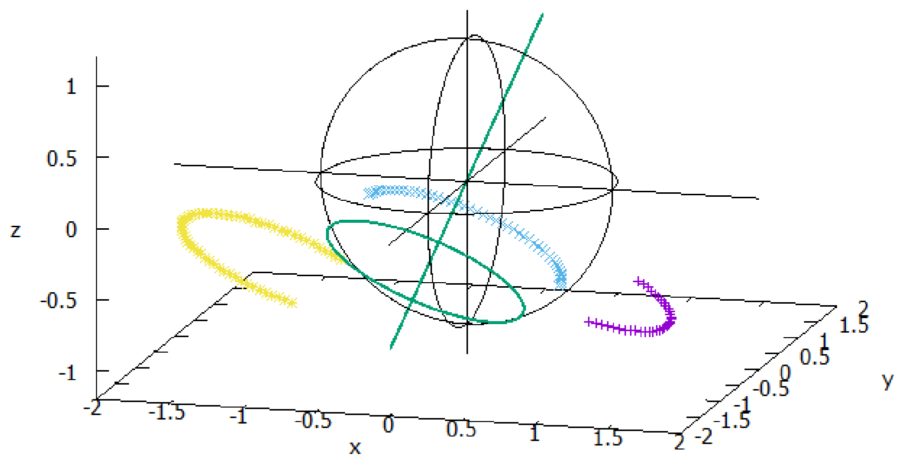


Der Sonnenlauf aufgetragen als Höhenwinkel gegen Azimutwinkel für den 21.Juni, den 21.August, den 21.September, den 21.Oktober und den 21.Dezember.



Der Sonnenlauf aufgetragen im Horizontsystem für den 21.Juni, den 21.September und den 21.Dezember (siehe Farben der vorherigen Abbildung).

Der Sonnenlauf für den 21.Juni, den 21.September und den 21.Dezember in meinem xyz-Koordinatensystem; für die Teile der Sonnenbahn über dem jeweiligen Horizont.



Auch auf der Südhalbkugel geht die Sonne im Osten auf, von Norden aus ist das rechts, bei positiven Azimutwinkeln. Die Kurven in der Auftragung Höhenwinkel gegen Azimutwinkel werden also nun von rechts nach links durchlaufen (man sieht es an der Reihenfolge der berechneten Punkte in der Ausgabedatei). Für unsere Antipoden - zumindest die zwischen dem Wendekreis des Steinbocks und dem südlichen Polarkreis - muss der Spruch lauten:

Im Osten geht die Sonne auf,
nach Norden nimmt sie ihren Lauf,
im Westen wird sie untergeh'n,
im Süden ist sie nie zu seh'n.