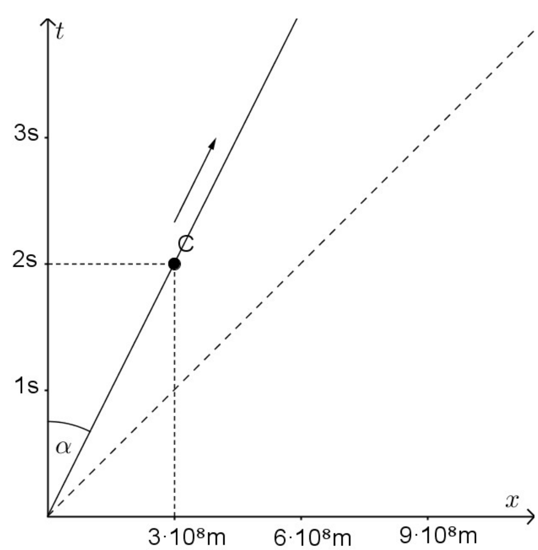
Spezielle Relativitätstheorie

Zeitdilatation, Längenkontraktion, Minkowski-Diagramme

Einleitung

Relativitätstheorie ist heutzutage Bestandteil von Schullehrplänen. Die Anforderungen beschränken sich allerdings auf qualitative Aussagen bzw. das Hinnehmen einiger kurzer Formeln. Das Verständnis dafür, dass Größen vom Bezugssystem abhängen noch im Rahmen der Newtonschen Physik, also mit Galilei-Transformation, sowie auch im Hinblick auf die Relativitätstheorie Methoden der Uhrensynchronisation sind in Lehrbüchern meist noch gut erarbeitet. Schon die Zeitdilatation wird jedoch oft an dem unglücklichen Beispiel der Lichtuhr hergeleitet, bei dem die Laufrichtung des Lichtstrahls quer zur Bewegungsrichtung gewählt ist.
Minkowski-Diagramme und wie sich in ihnen Zeitdilatation und Längenkontraktion äußern[1] sind selten in Schullehrbüchern. Man mag argumentieren, dass die Diagramme die Schwierigkeit schiefwinkliger Koordinatensysteme mit sich bringen. Mit der Verwandtschaft zur Vektorgeometrie im Fach Mathematik und auch der bei Kräften in der Physik gebrauchten Vektoraddition und -zerlegung sind Minkowski-Diagramme aber recht anschaulich einzuführen. Schließlich hat fast jeder schonmal vom Zwillingsparadoxon gehört. Oberstufenschülern ist man beim Thema Relativitätstheorie schuldig, dies aufzuklären, was wiederum recht anschaulich gelingt, wenn die Minkowski-Diagramme als Werkzeug zur Verfügung stehen.
Ziel dieses Aufsatzes ist es, die Minkowski-Diagramme mit der richtigen Skalierung zu etablieren, sowie Zeitdilatation und Längenkontraktion darin von jedem Beobachter aus zu verstehen. Gedankenexperimente aus Lehrbüchern und ebenfalls das Garagen- und das Zwillingsparadoxon werden im folgenden Aufsatz gründlich analysiert und aufgearbeitet.

Gleichzeitigkeit und Koordinatensysteme



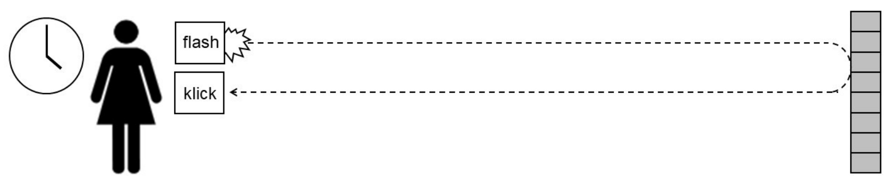
gleichförmige Bewegung und Lichtgerade

In der speziellen Relativitätstheorie bewegt sich meist ein Ding in bezug auf ein anderes oder ein Beobachter relativ zu einem anderen, und zwar mit einer Geschwindigkeit v, die konstant in Betrag und Richtung ist. Der Anfang all unserer Diagramme ist eine gleichförmige Bewegung, eine Gerade im Weg-Zeit-Diagramm. Unüblich gegenüber der gleichförmigen Bewegung in der klassischen Schulphysik ist nur, dass wir die Bewegungsrichtung bzw. Strecke x nennen (statt s) und dass die Wegachse die horizontale und die Zeitachse die vertikale ist; es sind nur die Achsen vertauscht.

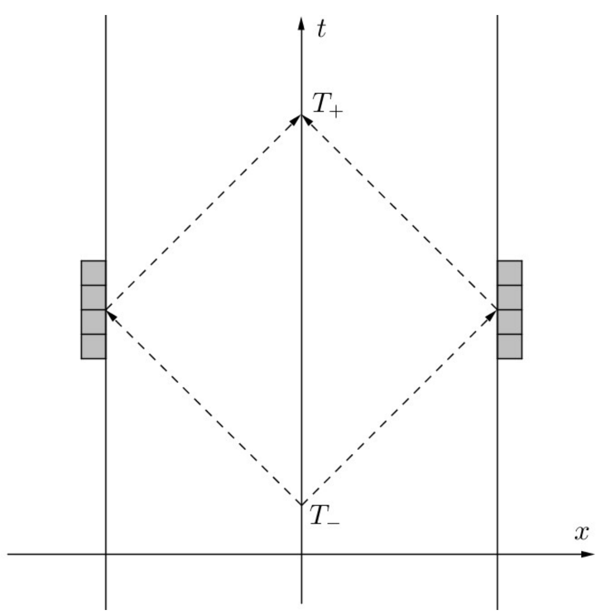
[1] Das Lexikon "Gerthsen Physik" präsentiert hier eine sehr verständliche Herleitung, aus der im Folgenden einiges übernommen wird.

Die Gerade durch eine Funktion $t = f(x) = x/v$ auszudrücken, wird selten vorkommen, aber wenn der Punkt C unser bewegtes Objekt repräsentiert, gilt für seine Koordinaten natürlich $x = v \cdot t$. Licht (Photonen) bewegt sich mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$. Die Einheiten auf den Achsen werden so gewählt, dass $3 \cdot 10^8$ m auf der x-Achse die gleiche gezeichnete Länge hat wie 1 s auf der t-Achse. Der Lichtgeschwindigkeit entspricht dann die Winkelhalbierende im Koordinatensystem. Da die Geschwindigkeit massiver Objekte kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein muss, sind alle ihre Weg-Zeit-Geraden (Weltlinien) steiler als die Winkelhalbierende. Im Diagramm beträgt die Geschwindigkeit des Objekts "C" $v = 1.5 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$. Als sehr nützlich wird sich die Beziehung $\tan(\alpha) = v/c$ herausstellen. Etwas oder jemand, der sich nicht bewegt, läuft im Diagramm mit der Zeit einfach die vertikale Achse hoch.

Da Autoren von Texten über Relativitätstheorie die Angewohnheit haben, den Beobachtern nette Namen zu geben, tue ich das auch. Es werden Lydia und Cliff sein (Gruß an "Raumschiff Orion"-Fans). Licht hat eine endliche, aber für alle die gleiche Geschwindigkeit. Beobachter messen Abstände über Lichtlaufzeiten.

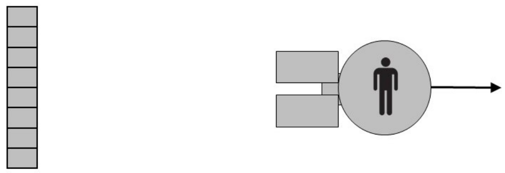


Lydia misst ihren Abstand zur Wand mit einem Lichtimpuls.

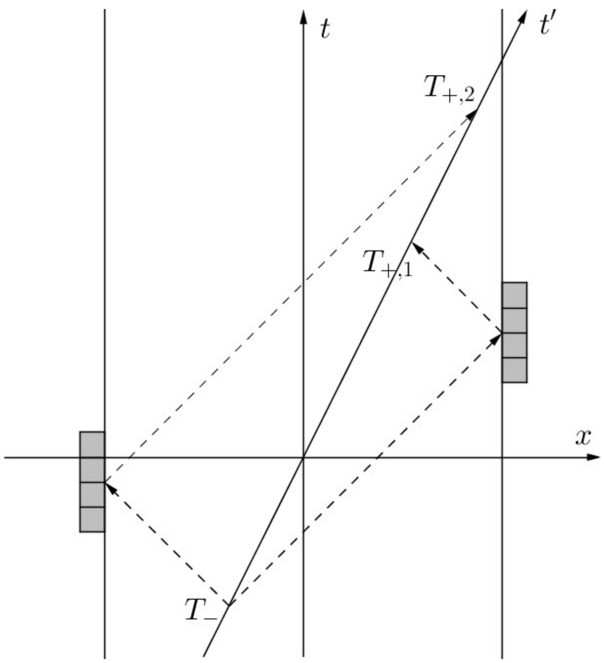


Zwei Lichtimpulse werden an zwei gleich weit entfernten Wänden reflektiert.

Wenn Lydia den Abstand von sich zu einer Wand feststellen möchte, sendet sie einen Lichtimpuls aus und stoppt die Zeit, bis der Impuls nach Reflexion an der Wand zu ihr zurückgekommen ist. Der Abstand zur Wand ist die halbe Zeit mal die Lichtgeschwindigkeit. Ist trivial, aber zum Vergleichen brauchen wir es: Wenn sich auf beiden Seiten von Lydia im gleichen Abstand je eine Wand befindet und sie Lichtimpulse gleichzeitig in beide Richtungen aussendet, kommen beide Signale gleichzeitig zu ihr zurück. Das sei hier im Raum-Zeit-Diagramm gezeichnet. Lydia ruht, ihre Weltlinie ist die t-Achse. Die Weltlinien der Wände sind dazu parallel. Bei T_- werden die Lichtimpulse ausgesendet, bei T_+ wieder empfangen. Licht kann sich auf allen Linien mit Steigung ±45° fortpflanzen (nicht nur auf der oder denen vom Ursprung aus); so werden Reflexionen gut dargestellt. Hier wird das Licht gleichzeitig an beiden Wänden reflektiert, und zwar zur Zeit $t = (T_+ + T_-)/2$.



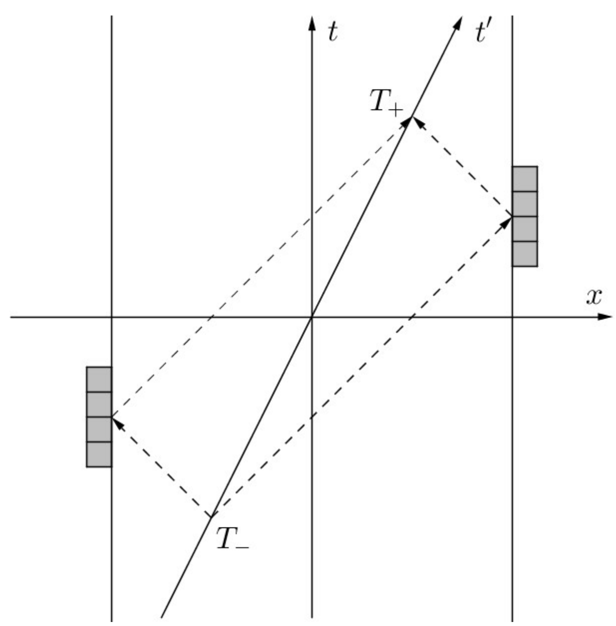
Cliff fliegt im Raumschiff und ist in bezug auf die Wände in Bewegung.



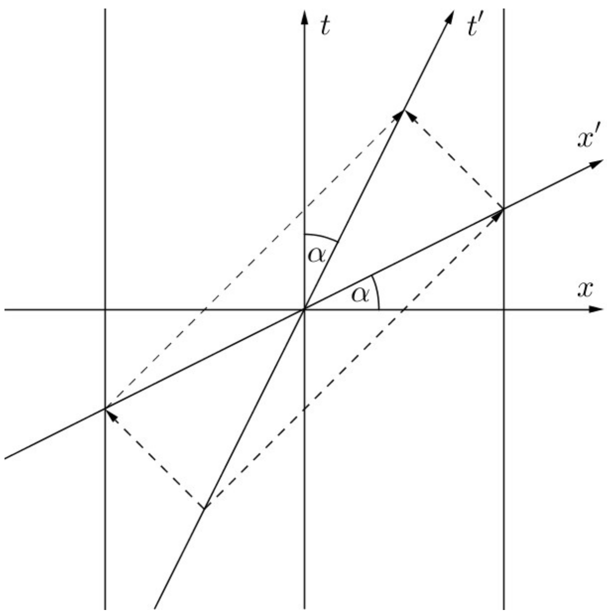
Cliff sendet irgendwann einen Lichtimpuls nach vorn und nach hinten aus.

Die Wände bleiben, wo sie sind. Cliff ist in Bewegung. Er fliegt mit seinem Raumschiff von einer kosmischen Wand zur anderen. Wir haben der Einfachheit halber hier nur eine Raumrichtung. Die zweite Dimension des Diagramms brauchen wir zur zeitlichen Aufzeichnung des Ablaufs. Wenn Cliff einfach irgendwann Lichtimpulse nach vorn und hinten losfeuert, kommen die Reflexionen im Allgemeinen nicht gleichzeitig zu ihm zurück, nicht nur, weil er vielleicht beim Aussenden nicht in der Mitte zwischen den Wänden war, sondern auch, weil er mit seiner Bewegung seine Position ständig verändert. Es gibt aber den einen richtigen Moment, so dass es klappt; dass gleichzeitig losgeschickte Lichtimpulse gleichzeitig zu ihm zurückkommen. (Wann und wo genau das ist, ist hier nicht wichtig, wird aber beim Schulbuchbeispiel zur Längenkontraktion ausgerechnet.)

Cliff kann feststellen, dass die Lichtsignale gleichzeitig zu ihm zurückkommen. Dass sie im Ruhesystem der Wände (Lydias System) zu verschiedenen Zeiten an den Wänden reflektiert wurden, kann er nicht wissen. In der Relativitätstheorie muss Gleichzeitigkeit (an verschiedenen Orten) definiert werden, und zwar in einer Art und Weise, die für alle Inertialsysteme funktioniert. Wenn ein Beobachter gleichzeitig zwei Lichtsignale aussendet, die nach Reflexionen gleichzeitig zu ihm zurückkommen, dann haben per definitionem die Reflexionen in seinem Bezussystem gleichzeitig stattgefunden. Noch prägnanter als mit Signalreflexionen wird dies mit Uhrensynchronisation formuliert; wobei unsere Wände durch Uhren ersetzt zu denken sind. Die Reflexionen starten die Uhren. Und wenn gleichzeitig ausgesendete Lichtsignale gleichzeitig zum Beobachter zurückkommen, sind



Cliff sendet seine Lichtsignale im richtigen Moment aus, so dass sie gleichzeitig zu ihm zurückkommen.



Die Reflexionen legen die x'-Achse fest.

für ihn die Uhren gleichzeitig gestartet worden und laufen synchron. Da im letzten Bild die Reflexionen im gestrichenen System zur selben Zeit stattfinden, können sie sich nur noch im Ort unterscheiden. Somit haben wir die Richtung der x'-Achse gefunden. Ob man die Achse noch rauf- oder runterschiebt, ist egal. Praktischerweise lässt man ihren Nullpunkt mit dem der x-Achse zusammenfallen. Da die Lichtsignale im 45°-Winkel im Koordinatensystem laufen, ist das von ihnen gebildete Viereck ein Rechteck. Die Verbindungslinie der Reflexionen ist als Diagonale zeichnerisch genauso lang wie der Abschnitt zwischen Signalaussendung und -empfang auf der t'-Achse. Desweiteren ergibt sich aus der Symmetrie des Bildes, dass die x'-Achse denselben Winkel α zur x-Achse hat wie die t'-Achse zur t-Achse. Damit haben wir das zweite, gestrichene und schiefwinklige Koordinatensystem des Minkowski-Diagramms gefunden. Nicht ganz; wir haben die Richtungen der t'- und der x'-Achse, aber noch nicht deren Skalierungen.

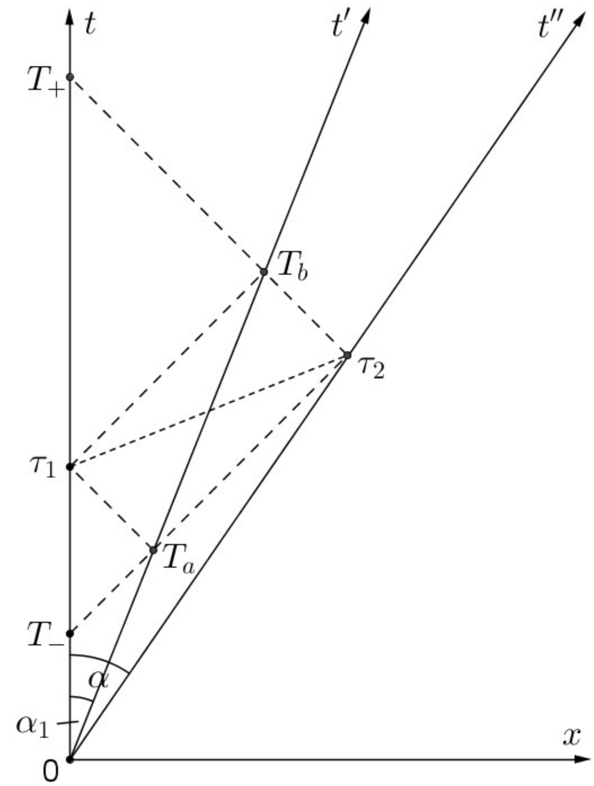
Wie schon vorher erwähnt, werden üblicherweise die Einheiten auf den Orts- und Zeitachsen so gewählt, dass die Lichtgerade $x = c \cdot t$ die Winkelhalbierende ist. Noch einfacher werden Herleitungen, wenn man die Lichtgeschwindigkeit auf eins normiert ($c \equiv 1$). Obwohl im Folgenden trotzdem x und t an den Achsen steht, hat man sich entweder t als ct oder x als x/c zu denken; statt v/c taucht nur noch v auf. In Rechnungen sind bei Addition und Subtraktion Größen so mit c zu multiplizieren bzw. durch c zu dividieren, dass sich dieselbe physikalische Einheit ergibt. Das ist aber nur eine Formalie und löst das Skalierungsproblem noch in keinster Weise.

Wir betrachten drei Systeme, z.B. eine Raumstation und zwei Raumschiffe. Zur Zeit Null verlassen die beiden Raumschiffe die Raumstation, wobei eins langsamer wegfliegt als das andere. Die Geschwindigkeiten sind so abgestimmt, dass es dem einen Raumschiff möglich ist, gleichzeitig bei T_a Lichtimpulse zur Raumstation und zum anderen Raumschiff zu senden, die es nach Reflexionen dort bei τ_1 und τ_2 auch gleichzeitig bei T_b wieder empfängt. Da wir auch die Verlängerungen der Signallinien zur t-Achse brauchen, kann man auch sagen: Die Raumstation sendet bei T_- ein Lichtsignal aus. Bei T_a empfängt es das eine Raumschiff, reflektiert es einerseits zur Raumstation zurück und schickt es andererseits zum zweiten Raumschiff weiter. Diese Signale werden bei τ_1 an der Raumstation und bei τ_2 am anderen Raumschiff reflektiert. Die Reflexionen erreichen das erste Raumschiff zusammen bei T_b. Das Signal wird nochmals zur Raumstation zurückgesendet, wo es bei T_+ ankommt.
Da T_aT_b eine Diagonale im Rechteck $T_a\tau_1T_b\tau_2$ ist, ist $\tau_1\tau_2$ die andere Diagonale, parallel zur x'-Achse und eine Gleichzeitigkeitslinie im System des ersten Raumschiffs (dessen Weltlinie die t'-Achse ist). Und τ_1 auf der t-Achse muss die gleiche Zeit sein wie τ_2 auf der t''-Achse ($\tau_1{=}\tau_2$). Im Nullpunkt fielen alle Systeme zusammen, also waren auch da das ungestrichene und das zweigestrichene für den eingestrichenen Beobachter gleichzeitig. Auf der Verbindungslinie von τ_1 und τ_2 sind sie das immer noch (auch wenn der eingestrichene Beobachter selber eine andere Zeit hat). Er könnte beide von Null bis dort synchron beobachten, also muss für die beiden

gleich viel Zeit vergangen sein.

T_-, T_+, T_a, T_b, τ_1 und τ_2 bezeichnen sowohl die entsprechenden Punkte als auch die Werte auf den Zeitachsen. Die Dreiecke OT_+T_b und $O\tau_1T_a$ sind ähnlich, daher gilt $T_+/\tau_1 = T_b/T_a$. Die Dreiecke $O\tau_1T_b$ und OT_-T_a sind ähnlich, daher gilt $\tau_1/T_- = T_b/T_a$. (Da wir jetzt nur das Verhältnis T_b/T_a brauchen, ist es unerheblich, ob T_a und T_b die Längen von O zeichnerisch gemessen oder skaliert auf der t'-Achse bedeuten.) Aus den gleichen Verhältnissen folgt $T_+/\tau_1 = \tau_1/T_-$ oder $\tau_1^2 = T_+T-$ bzw. $\tau_1 = \sqrt{T_+T_-}$, also auch $\tau_2 = \sqrt{T_+T_-}$, da die beiden gleich sind.

Da $T_-\tau_2T_+$ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ist, sind die Koordinaten des Punktes τ_2: $x = (T_+ - T_-)/2$, $t = (T_+ + T_-)/2$. Die zeichnerische Länge von O bis τ_2 beträgt



Konstruktion zur Herleitung des Skalierungsfaktors schiefwinkliger Achsen

$$\sqrt{x^2+t^2} = \sqrt{\left(\frac{T_+ - T_-}{2}\right)^2 + \left(\frac{T_+ + T_-}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{T_+^2 - 2T_+T_- + T_-^2 + T_+^2 + 2T_+T_- + T_-^2}{4}}$$

$= \sqrt{\dfrac{T_+^2 + T_-^2}{2}}$. Die dem doppelt gestrichenen System entsprechende Geschwindigkeit beträgt

$v = \tan(\alpha) = \dfrac{x}{t} = \dfrac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-}$. Wir müssen das Verhältnis der geometrischen Länge $\sqrt{x^2+t^2}$ zum Zeitwert τ_2 bilden und durch v ausdrücken.

$$\frac{\sqrt{x^2+t^2}}{\tau_2} = \sqrt{\frac{T_+^2 + T_-^2}{2T_+T_-}} = \sqrt{\frac{(T_+ + T_-)^2 + (T_+ - T_-)^2}{(T_+ + T_-)^2 - (T_+ - T_-)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-}\right)^2}{1 - \left(\frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1+v^2}{1-v^2}}$$

Um diesen Faktor müssen Einheiten auf der t''-Achse zeichnerisch länger sein als auf der t-Achse. Dass es sich hier um die t''-Achse handelte, interessiert nicht mehr. Es ist die Zeitachse (=Weltlinie) des gegenüber dem ungestrichenen System mit v bewegten Systems. Die t'-Achse wurde nur für die Argumentation zu $\tau_1 = \tau_2$ und die ähnlichen Dreiecke benötigt. Auf Achsen zum mit v bewegten System müssen im Minkowski-Diagramm die Einheiten zeichnerisch um den Faktor $\sqrt{(c^2+v^2)/(c^2-v^2)}$ (mit c) länger sein als auf den rechtwinkligen Achsen.

Einschub: Wir könnten das Raumschiff zwischen der Raumstation und dem anderen als senkrechte Achse nehmen, also die t'-Achse senkrecht, die t-Achse nach links oben und die t''-Achse nach rechts oben. Dann muss das Rechteck aus Lichtsignalen zum Quadrat werden wie bei Lydia mit den zwei Wänden. Die Raumstation und das andere Raumschiff entfernen sich also vom Raumschiff dazwischen aus gesehen mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzte Richtungen. Warum entfernt sich dann im verwendeten Diagramm von der Raumstation aus gesehen das zweite Raumschiff nicht mit der doppelten Geschwindigkeit des ersten? Die Geschwindigkeit des zweiten Raumschiffs mit der t''-Achse als Weltlinie kennen wir schon, $v = \dfrac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-}$.

Die Geschwindigkeit des ersten Raumschiffs lässt sich aus den Koordinaten des Punkts T_a bilden. Da $T_- T_a \tau_1$ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ist, lauten diese: $x = (\tau_1 - T_-)/2$ und $t = (\tau_1 + T_-)/2$, also $v_1 = \tan(\alpha_1) = \dfrac{x}{t} = \dfrac{\tau_1 - T_-}{\tau_1 + T_-}$. Das ist nicht die Hälfte von v.

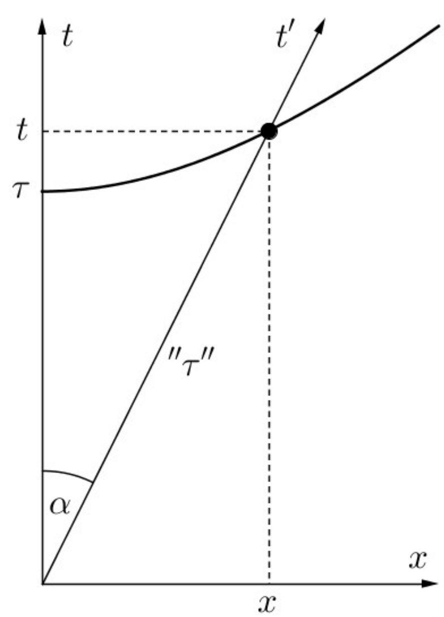
Ein Minkowski-Diagramm ist eigentlich nicht für mehr als zwei Inertialsysteme gedacht. Mit dem dritten System in Form der t''-Achse zeigt sich die korrekte Geschwindigkeitsaddition der Relativitätstheorie. Zwei Geschwindigkeiten v_1 und v_2 addieren sich zu $\dfrac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$ bzw. $\dfrac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$, was auch verhindert, dass das Ergebnis die Lichtgeschwindigkeit überschreitet.

Von der ungestrichenen Achse aus einmal unser v_1 und nochmal unser v_1 dazu macht also:

$$\frac{2 \cdot \frac{\tau_1 - T_-}{\tau_1 + T_-}}{1 + \left(\frac{\tau_1 - T_-}{\tau_1 + T_-}\right)^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{T_+ T_-} - T_-}{\sqrt{T_+ T_-} + T_-} \cdot \frac{(\sqrt{T_+ T_-} + T_-)^2}{(\sqrt{T_+ T_-} + T_-)^2 + (\sqrt{T_+ T_-} - T_-)^2}$$

$$= \frac{2 \cdot (\sqrt{T_+ T_-} - T_-)(\sqrt{T_+ T_-} + T_-)}{T_+ T_- + 2T_- \sqrt{T_+ T_-} + T_-^2 + T_+ T_- - 2T_- \sqrt{T_+ T_-} + T_-^2} = \frac{2 \cdot (T_+ T_- - T_-^2)}{2 \cdot (T_+ T_- + T_-^2)} = \frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} = v$$

q.e.d.



Punkt zur Zeit τ auf der t'-Achse

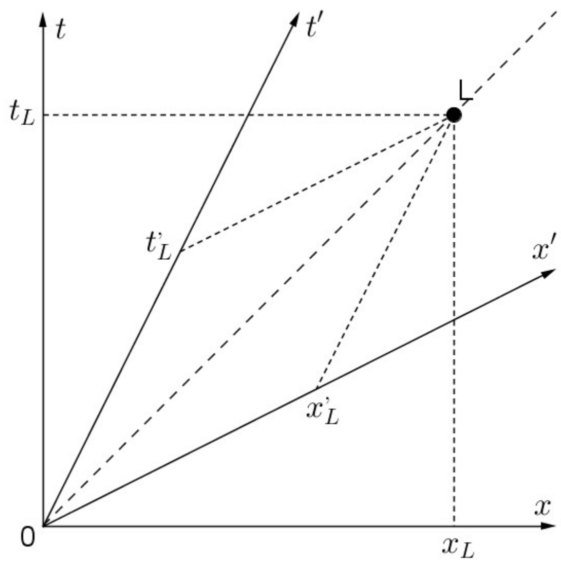
Lassen wir α bzw. das dazugehörige v jetzt variabel, haben alle Punkte mit

$$\tau = \sqrt{x^2 + t^2} \cdot \frac{\sqrt{1 - v^2}}{\sqrt{1 + v^2}}$$

auf der jeweiligen Zeitachse vom Ursprung durch den Punkt (x,t) dieselbe Eigenzeit τ. Mit $x = v \cdot t$ lässt sich diese Bedingung umformen:

$$\tau^2 = t^2 \cdot (v^2 + 1) \cdot \frac{1 - v^2}{1 + v^2} = t^2 \cdot (1 - v^2) = t^2 - x^2$$

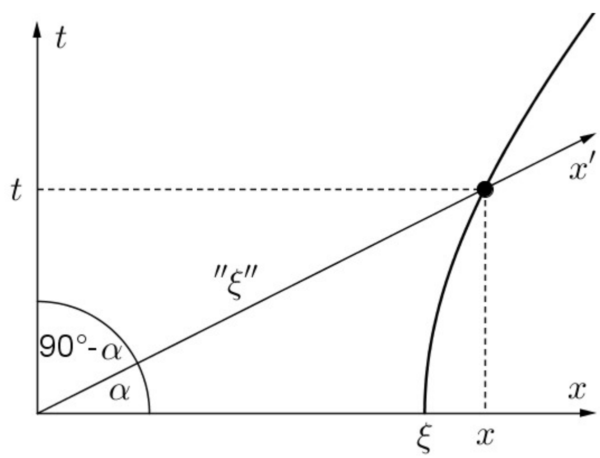
oder $\tau = \sqrt{t^2 - x^2}$, wie es üblicherweise geschrieben wird. Die Funktion aller Punkte, die die Eigenzeit τ vom Ursprung entfernt sind, ist im x-t-Koordinatensystem übrigens die Hyperbel $t = \sqrt{\tau^2 + x^2}$.



Koordinaten eines Punkts auf der Lichtgeraden in beiden Systemen

Da die Lichtgerade in allen Koordinatensystemen die Winkelhalbierende ist, müssen Punkte auf der Lichtgeraden in allen Systemen auf beiden Achsen gleiche Koordinatenwerte haben. Für einen Punkt L auf der Lichtgeraden ist $x_L = t_L$ und ebenso $x'_L = t'_L$. Daher muss die Skalierung der x'-Achse die gleiche wie die der t'-Achse sein, d.h. eine Einheit ist zeichnerisch um den Faktor $\sqrt{(1+v^2)/(1-v^2)}$ bzw. $\sqrt{(c^2+v^2)/(c^2-v^2)}$ länger als auf der x-Achse.

Ebenso wie die Punkte mit Abstand konstanter Eigenzeit vom Ursprung können wir die Punkte mit konstantem räumlichen Abstand ξ vom Ursprung betrachten, wenn immer die x'-Achse durch den Punkt gewählt wird, also das System, in dem der Ereignispunkt auch zur Zeit Null ist.



Punkte mit Koordinate ξ auf der x'-Achse

Die Bedingung lautet

$$\xi = \sqrt{x^2+t^2} \cdot \frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1+v^2}}$$

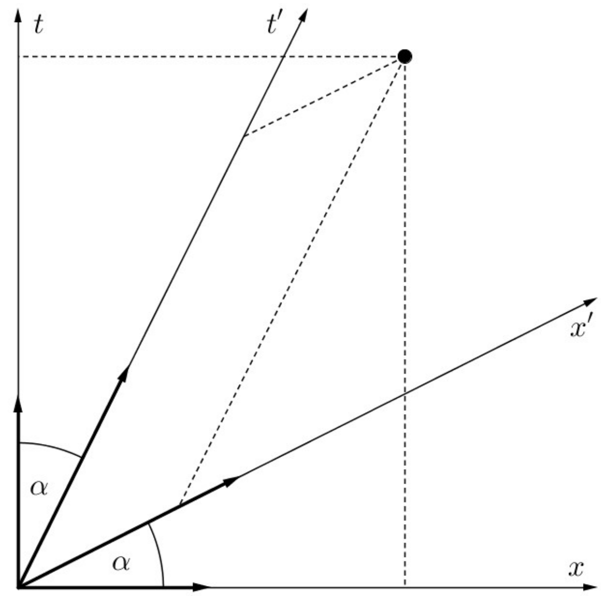
Die x'-Achse gehört zur t'-Achse zur Geschwindigkeit v mit $v = \tan(\alpha)$ im einheitenlosen Rechnen. Da wir uns hier aber nicht auf der t'-Achse, sondern auf der x'-Achse befinden, ist hier $t/x = \tan(\alpha)$. x und t bedeuten hier nur die Koordinaten des Punktes im Diagramm. Vom Ursprung zum Punkt kann man nicht fliegen oder etwas senden (das wäre Überlichtgeschwindigkeit). Das hier gemeinte v ist kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, $v = \tan(\alpha) < 1$; die Wurzel ist möglich.

Umformen der Bedingung:

$$\xi^2 = x^2 \cdot (1+\tan^2(\alpha)) \cdot \frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = x^2 \cdot (1-\tan^2(\alpha)) = x^2 - t^2$$

Es sind die Punkte, für die $\sqrt{x^2-t^2} = \xi =$ konst. ist, und sie bilden die Hyperbel $t = \sqrt{x^2-\xi^2}$.

Lorentztransformation



Die Umrechnung von einem Inertialsystem in ein anderes heißt Lorentztransformation (nach Hendrik Antoon Lorentz 1853-1928). Ich benutze zur Herleitung hier Vektorgeometrie. Der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$ aus dem kartesischen Koordinatensystem soll in der Basis $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}}$ und $\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}}$ der gestrichenen Achsen geschrieben werden, mit $v = \tan(\alpha)$. Der Skalierungsfaktor der gestrichenen Achsen ist bereits enthalten.

links: ein Punkt mit Projektion auf die ungestrichenen sowie die gestrichenen Koordinatenachsen und Einheitsvektoren entlang der Achsen

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = x' \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} + t' \cdot \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\begin{aligned} x &= x' \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} + t' \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} && | \cdot \cos(\alpha) \\ t &= x' \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} + t' \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} && | \cdot (-\sin(\alpha)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot \cos(\alpha) &= x' \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} + t' \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} \\ -t \cdot \sin(\alpha) &= -x' \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} - t' \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen und weiteres Umformen liefert:

$$\begin{aligned} x \cdot \cos(\alpha) - t \cdot \sin(\alpha) &= x' \cdot (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) \cdot \frac{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}{\sqrt{1-\tan^2(\alpha)}} \\ \cos(\alpha) \cdot (x - t \cdot \tan(\alpha)) &= x' \cdot \cos^2(\alpha) \cdot (1 - \tan^2(\alpha)) \cdot \frac{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}{\sqrt{1-\tan^2(\alpha)}} \\ x - t \cdot \tan(\alpha)) &= x' \cdot \underbrace{\cos(\alpha) \cdot \sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}_{1} \cdot \frac{1-\tan^2(\alpha)}{\sqrt{1-\tan^2(\alpha)}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad x' = \frac{x - t \cdot \tan(\alpha)}{\sqrt{1-\tan^2(\alpha)}} = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1-v^2}}$$

Analog leitet man her:

$$\begin{aligned}
x &= x' \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} + t' \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} \qquad | \cdot (-\sin(\alpha)) \\
t &= x' \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} + t' \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} \qquad | \cdot \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-x \cdot \sin(\alpha) &= -x' \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} - t' \cdot \sin^2(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} \\
t \cdot \cos(\alpha) &= x' \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}} + t' \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{1-v^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) \cdot (t - x \cdot \tan(\alpha)) &= t' \cdot \cos^2(\alpha) \cdot (1 - \tan^2(\alpha)) \cdot \frac{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}{\sqrt{1-\tan^2(\alpha)}} \\
t - x \cdot \tan(\alpha) &= t' \cdot \sqrt{1-\tan^2(\alpha)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad t' = \frac{t - x \cdot \tan(\alpha)}{\sqrt{1-\tan^2(\alpha)}} = \frac{t - v \cdot x}{\sqrt{1-v^2}}$$

Umgekehrt erhält man

$$x' + v \cdot t' = \frac{x - v \cdot t + v \cdot t - v^2 \cdot x}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{x \cdot (1-v^2)}{\sqrt{1-v^2}} = x \cdot \sqrt{1-v^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1-v^2}}$$

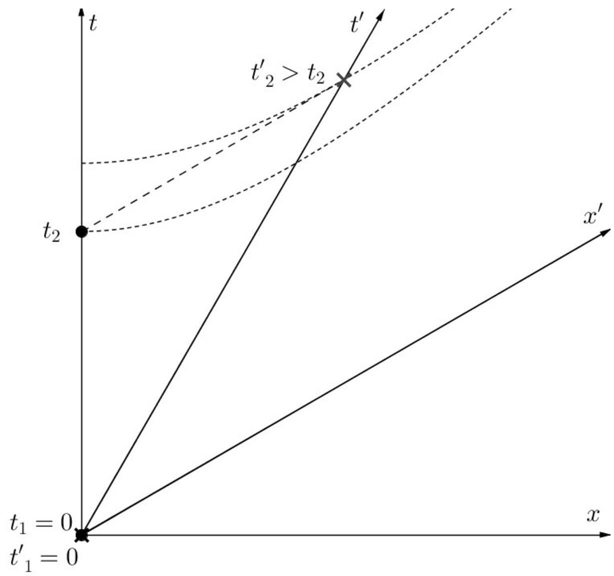
$$t' + v \cdot x' = \frac{t - v \cdot x + v \cdot x - v^2 \cdot t}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{t \cdot (1-v^2)}{\sqrt{1-v^2}} = t \cdot \sqrt{1-v^2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{t' + v \cdot x'}{\sqrt{1-v^2}}$$

Werden die Faktoren c wieder mitgeschrieben, lauten die Transformationen in beide Richtungen:

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} \cdot x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Zeitdilatation und Längenkontraktion

Im Folgenden geht es jeweils um zwei Ereignisse, die in verschiedenen Bezugssystemen beobachtet werden. Das gestrichene System bewegt sich mit v gegenüber dem ungestrichenen. Die großen Punkte sind die Ereignisse. Kreuze und kleine Punkte markieren nur Messwerte. In den ersten vier Bildern legen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Nullpunkte des ungestrichenen und des gestrichenen Koordinatensystems in das erste Ereignis, so dass die Systeme dort zusammenfallen. Dann sind die Koordinaten nämlich direkt die Differenzen (zu Null). Ebenso bleibt in den ersten vier Bildern für die Ereignisse jeweils eine Koordinate (Ort oder Zeit) für einen Beobachter fest. In diesem Abschnitt wird bei den Lorentztransformationen der Faktor c mitgeschrieben.

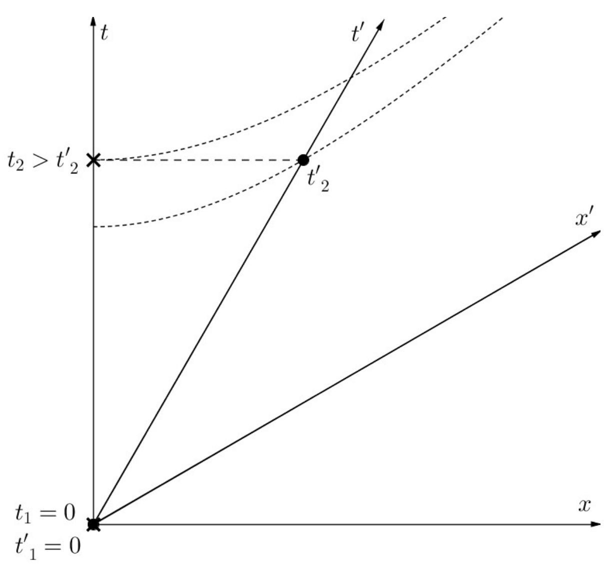


zwei Ereignisse an festem Ort
im ungestrichenen System,
beobachtet aus dem gestrichenen

Wir betrachten zwei Ereignisse, die im ungestrichenen System bei $x = 0$ zu den Zeiten $t_1 = 0$ und t_2 stattfinden. Die Zeitkoordinate t'_2 des zweiten Ereignisses wird durch Ziehen einer Parallele zur x'-Achse durch den Ereignispunkt ermittelt. (Die Ortskoordinate im gestrichenen System interessiert hier nicht.) Neben der gestrichelten Konstruktionslinie sind Hyperbeln konstanter Eigenzeit eingezeichnet. Nach der Lorentztransformation gilt

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} \cdot x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > t_2$$

mit $x_2 = 0$. Im gestrichenen System haben die Ereignisse einen größeren zeitlichen Abstand als im ungestrichenen, in dem sie am selben Ort stattfinden. Der Beobachter im gestrichenen System würde zu dem im ungestrichenen sagen, dass dessen Uhr zu langsam geht; das ist Zeitdilatation. Beachte, dass die gestrichelte Linie keine durchführbare Messung darstellt. Um die Zeit t'_2 zu ermitteln, müsste der Beobachter im gestrichenen System rechtzeitig vorher einen Lichtimpuls aussenden, der dann genau am Ereignis ($x = 0$, t_2) reflektiert wird und entsprechend später zu ihm zurückkommt.



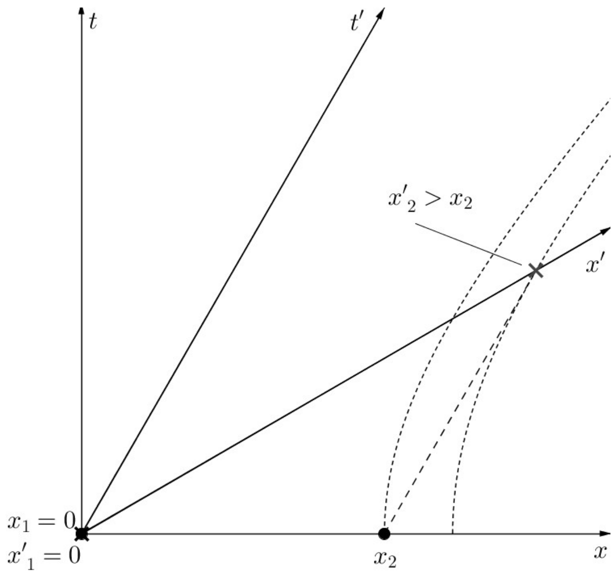
zwei Ereignisse an festem Ort
im gestrichenen System,
beobachtet aus dem ungestrichenen

Als nächstes betrachten wir zwei Ereignisse, die im gestrichenen System bei $x' = 0$ zu den Zeiten $t'_1 = 0$ und t'_2 stattfinden. Die Zeitkoordinate t_2 des zweiten Ereignisses erhält man durch Ziehen der Parallele zur x-Achse durch den Ereignispunkt. Hyperbeln konstanter Eigenzeit sind mit eingezeichnet, woran bereits $t_2 > t'_2$ abzulesen ist, wie auch an der Lorentztransformation

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} \cdot x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > t'_2$$

mit $x'_2 = 0$. Hier würde der Beobachter im ungestrichenen System zum Beobachter im gestrichenen System sagen, dass dessen Uhr zu langsam geht.

Mit den richtigen Projektionen (Parallelenziehen) im Minkowski-Diagramm wird klar, wie es sein kann, dass bei zwei relativ zueinander bewegten Beobachtern für jeden die Uhr des anderen langsamer geht. („Bewegte Uhren gehen langsamer.")

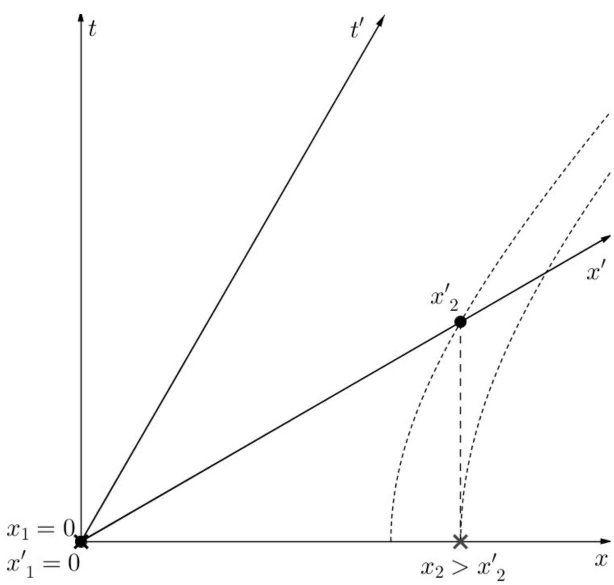


zwei Ereignisse zu fester Zeit im ungestrichenen System, beobachtet aus dem gestrichenen

Jetzt betrachten wir zwei Ereignisse, die im ungestrichenen System gleichzeitig stattfinden, der Einfachheit halber zur Zeit Null. Die Ereignisse sind bei $x_1 = 0$ und x_2. Die "Ereignisse" können auch schlicht das "Vorhandensein" der beiden Enden eines Längenstabs sein. Die Ortskoordinate x'_2 des zweiten Ereignisses ermittelt man durch Ziehen einer Parallele zur t'-Achse durch den Ereignispunkt. Die beiden Ereignisse werden im gestrichenen System nicht gleichzeitig sein, aber die Zeitkoordinaten interessieren hier nicht. Im Diagramm sind auch zwei Hyperbeln konstanten räumlichen Abstands vom Nullpunkt auf allen x'-Achsen eingezeichnet. Die Lorentztransformation liefert

$$x'_2 = \frac{x_2 - v \cdot t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > x_2$$

mit $t_2 = 0$.



zwei Ereignisse zu fester Zeit im gestrichenen System, beobachtet aus dem ungestrichenen

Betrachten wir umgekehrt zwei Ereignisse auf der x'-Achse, also gleichzeitig im gestrichenen System, bei $x'_1 = 0$ und x'_2. Die Ortskoordinate x_2 des zweiten Ereignisses im ungestrichenen System erhält man graphisch einfach durch Ziehen der Parallele zur t-Achse durch den Ereignispunkt. In der Zeichnung ist die Strecke vom Nullpunkt zu x_2 auf der x-Achse zwar kürzer als die Strecke vom Nullpunkt zu x'_2 auf der x'-Achse. Aber wegen der Achsenskalierung bedeutet x_2 sogar einen größeren Wert als x'_2. Das zeigen die Hyperbeln konstanten räumlichen Abstands vom Ursprung sowie die Lorentztransformation

$$x_2 = \frac{x'_2 + v \cdot t'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > x'_2$$

mit $t'_2 = 0$.

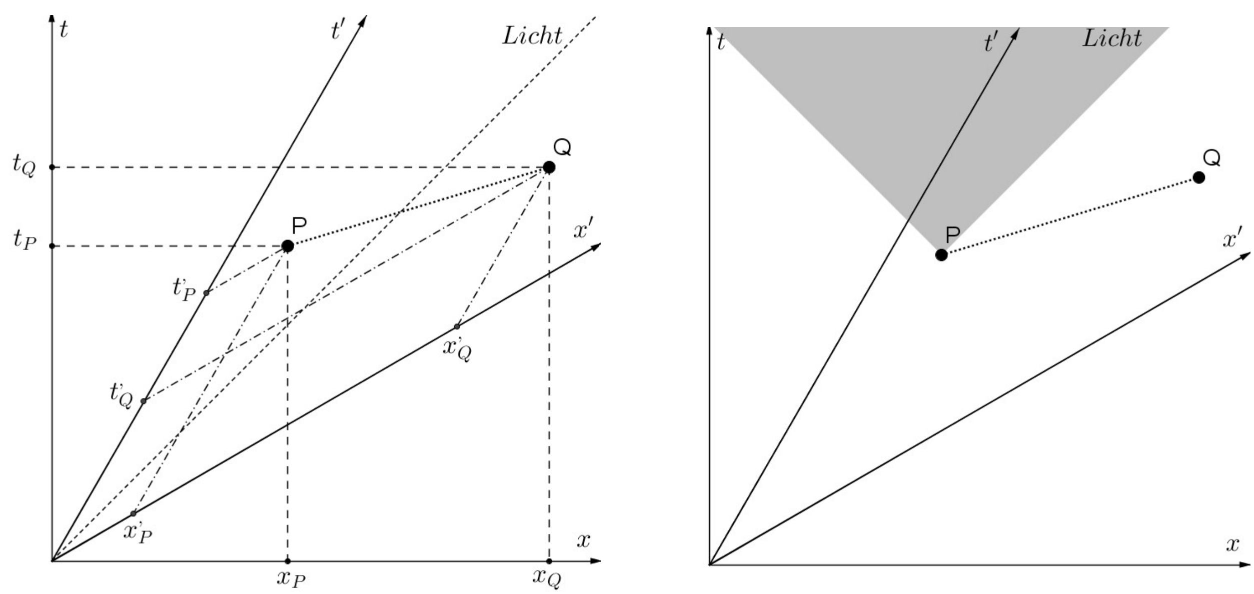
Die Koordinatenfeststellung der Ereignisse im jeweils anderen System ist völlig richtig. So ist das mit der Längenkontraktion in der Relativitätstheorie aber nicht gemeint! Die Längenkontraktion meint nicht, dass der gegenüber einem Stab bewegte Beobachter dem mit dem Stab ruhenden Beobachter vorwirft, eine zu kurze Länge des Stabs festzustellen. Im Gegenteil: Die Längenkontraktion meint, dass der relativ zum Stab bewegte Beobachter den Stab verkürzt sieht im Vergleich zum mit dem Stab ruhenden Beobachter. Das Wort "beobachtet" in den

Bildunterschriften ist eigentlich nicht richtig. Projektion auf Achsen im Minkowski-Diagramm transformiert eben Koordinaten von einem System ins andere. Beobachten, Sehen, Messen ist in der Relativitätstheorie aber auf die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit beschränkt. Bei der Längenkontraktion kommt zum Tragen, dass der gegenüber den Ereignissen bzw. Stabenden bewegte Beobachter die Länge dazwischen nur durch Hin- und Herschicken von Lichtsignalen bestimmen kann. Damit kommt tatsächlich heraus, dass dem bewegten Beobachter Maßstäbe verkürzt erscheinen, und wie das geht, wird im folgenden Artikel "Gängige Beispiele aus Schulbüchern und Internet" ausführlich gezeigt.

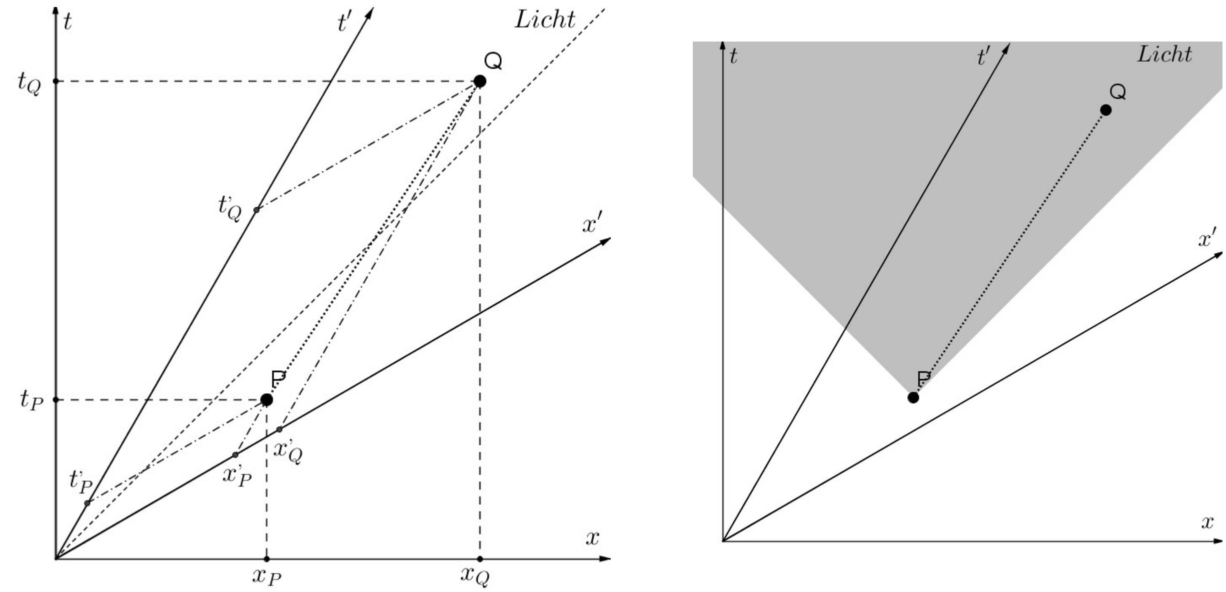
Raumartige und zeitartige Abstände

Eine weitere bekannte und wahre Aussage der Relativitätstheorie lautet, dass in verschiedenen Bezugssystemen die zeitliche Reihenfolge von Ereignissen umgekehrt zueinander sein kann. Trotzdem wird das Kausalitätsprinzip, also ob ein Ereignis ein anderes verursachen oder darauf Einfluss nehmen kann, nicht verletzt. Dazu muss der Unterschied zwischen raumartigen und zeitartigen Abständen erklärt werden. In diesem Abschnitt werden Relationen wieder mit der Normierung $c \equiv 1$ geschrieben.

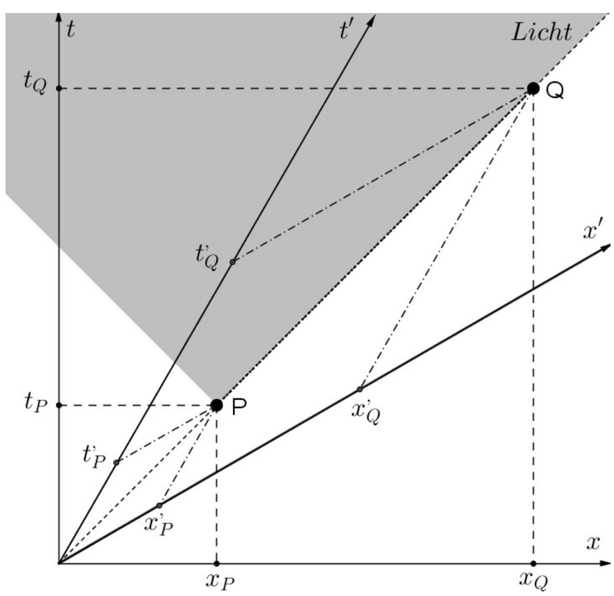
Zwei Ereignisse P und Q haben einen raumartigen Abstand, wenn ihre Verbindungslinie im Minkowski-Diagramm eine flachere Steigung als die Winkelhalbierende (Lichtgerade) hat. Dann kann man zwei Bezugssysteme finden, in denen ihre zeitliche Reihenfolge verschieden ist. Im Bild liegt t_P vor t_Q auf der t-Achse, aber t'_Q vor t'_P auf der t'-Achse. Eine Information kann höchstens mit Lichtgeschwindigkeit übertragen werden. P kann nur Ereignisse beeinflussen, die in seinem Zukunftslichtkegel liegen (Q ebenso). Bei einem raumartigen Abstand können P und Q keine Auswirkungen aufeinander haben, insofern ist es egal, in welcher Reihenfolge man die Ereignisse in die Geschichtsbücher schreibt. Es lässt sich für zwei raumartige Ereignisse stets ein Bezugssystem finden, in dem sie gleichzeitig sind. Allgemein gilt: $(t_Q - t_P)^2 - (x_Q - x_P)^2 < 0$



Zwei Ereignisse P und Q mit raumartigem Abstand. links: Projektion auf die Achsen zweier Bezugssysteme, rechts: mit Lichtkegel von P; Q liegt nicht darin.



Zwei Ereignisse P und Q mit zeitartigem Abstand. links: Projektion auf die Achsen zweier Bezugssysteme, rechts: mit Lichtkegel von P; Q liegt drin.



Zwei Ereignisse P und Q mit lichtartigem Abstand.

Zwei Ereignisse haben einen zeitartigen Abstand, wenn ihre Verbindungslinie steiler als die Winkelhalbierende ist. Dann haben sie auch in allen Bezugssystemen dieselbe zeitliche Reihenfolge. Hier liegt Q im Zukunftslichtkegel von P, so dass P auf Q Einfluss haben kann. Allgemein gilt für zeitartige Abstände: $(t_Q - t_P)^2 - (x_Q - x_P)^2 > 0$ (Die Wurzel aus diesem Ausdruck ist die Eigenzeit τ, also die Zeit in dem Bezugssystem, in dem die Ereignisse am selben Ort stattfinden.)

Der Grenzfall ist der lichtartige Abstand. Dann gilt: $(t_Q - t_P)^2 - (x_Q - x_P)^2 = 0$, $(\tau = 0)$