Spezielle Relativitätstheorie

Gängige Beispiele aus Schulbüchern und Internet

Manche Gedankenversuche als Beispiele in Schulbüchern versuchen mit sehr einfachen Skizzen zu erklären, wie der Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ bei der Zeitdilatation und Längenkontraktion einzusetzen ist. Dabei bleibt aber zumeist unklar, wie es genauso Zeitdilatation bzw. Längenkontraktion geben kann, wenn man Beobachter und Beobachteten austauscht. Die einfachen Skizzen und Überlegungen scheinen die Minkowski-Diagramme überflüssig zu machen. Eine wirklich stimmige Erklärung erhält man nur in diesen Diagrammen mit den Projektionen von Ereignissen aus einem Bezugssystem ins andere Bezugssystem. Im Folgenden sind einige Beispiele aus Schulbüchern wiedergegeben und ich habe Minkowski-Diagramme dazu erstellt. Und auch zu zwei netten guten Videos aus dem Internet zeige ich die trockene Theorie in den Diagrammen.

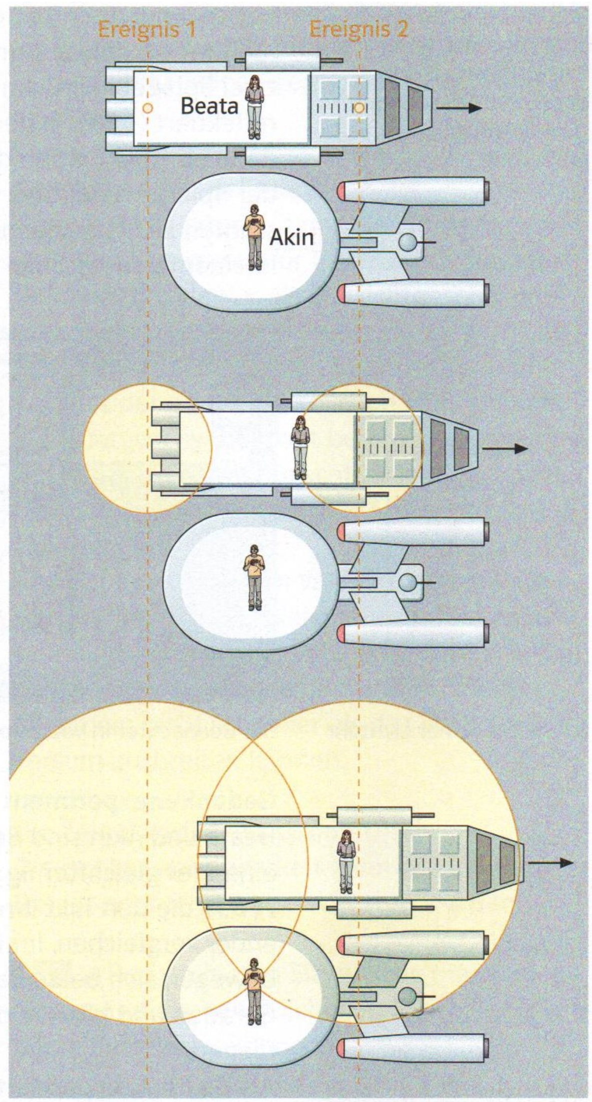
In *Impulse Physik Oberstufe (Klett 2022)* findet man zur Gleichzeitigkeit das folgende Szenario:

Gedankenexperiment zur Gleichzeitigkeit

Beata und Akin befinden sich an Bord zweier gleichförmig zueinander bewegter Raumschiffe (→**B2**). Als Beata, die sich in der Mitte ihres Raumschiffes befindet, Akin passiert, leuchten kurzzeitig zwei Lampen an den Enden ihres Raumschiffs auf. Das Licht beider Lampen erreicht Akin zur gleichen Zeit. Da er sich gleich weit von den beiden Lampen entfernt befand, als diese aufleuchteten, kann Akin schlussfolgern, dass die beiden Leucht-Ereignisse in seinem Ruhesystem gleichzeitig stattgefunden haben.

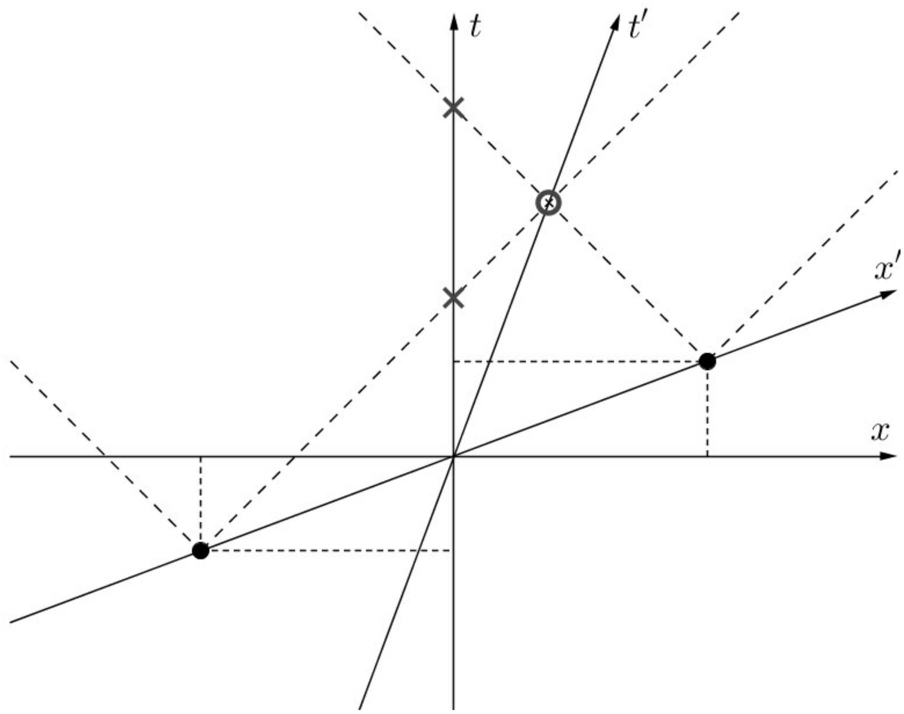
Beatas Raumschiff bewegt sich aus Akins Sicht auf die vordere Lichtwelle zu und von der hinteren weg. Daher erreicht Beata zuerst das Licht der vorderen Lampe und danach das der hinteren. Weil sich Beata in ihrem Ruhesystem in der Mitte der Lampen befindet, sie das Licht der Lampen aber nacheinander erreicht, finden die Leucht-Ereignisse in Beatas Ruhesystem nicht gleichzeitig statt.

Ereignisse, die an verschiedenen Orten in einem Inertialsystem gleichzeitig stattfinden, treten in einem anderen, relativ dazu bewegten Inertialsystem im Allgemeinen nicht gleichzeitig auf. Wegen des Relativitätsprinzips ist der Effekt symmetrisch, d.h., gleichzeitige Ereignisse in Beatas Ruhesystem finden in Akins Ruhesystem zeitversetzt statt.



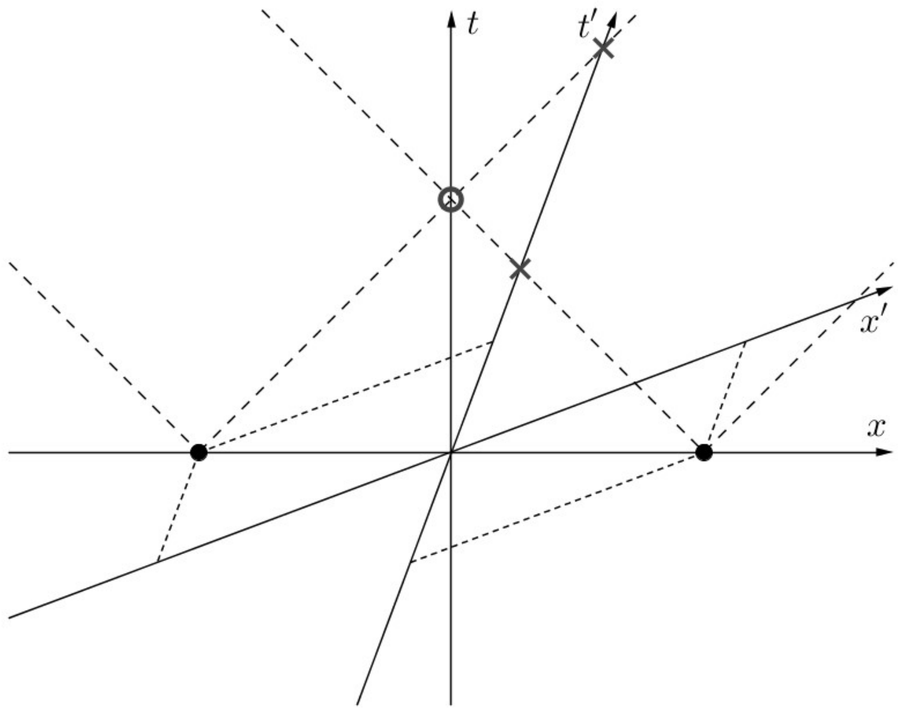
B2 Gedankenexperiment zur Relativität der Gleichzeitigkeit von Ereignissen

Der zweite Textabsatz *"Beatas Raumschiff bewegt sich ... auf die vordere Lichtwelle zu und von der hinteren weg. Daher erreicht ..."* scheint direkt dem Postulat der Relativitätstheorie, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen gleich ist, zu widersprechen. Hinterhergeschoben wird die Erklärung, dass die Lampen für Beata nicht gleichzeitig aufleuchten. Aber wie soll das gehen, wenn die Lampen doch genau dann aufleuchten, wenn sich Akin in der Mitte zwischen Bug und Heck von Beatas Raumschiff befindet (und Beata auch)? Der Schlüssel steckt in der Formulierung *"aus Akins Sicht"* im ersten Satz des zweiten Absatzes. Aber verstehen, wie dies nicht $c = konstant$ widersprechen soll, kann nur ein Leser, der die Relativitätstheorie bereits beherrscht.



Lampen leuchten an Beatas Raumschiff auf.

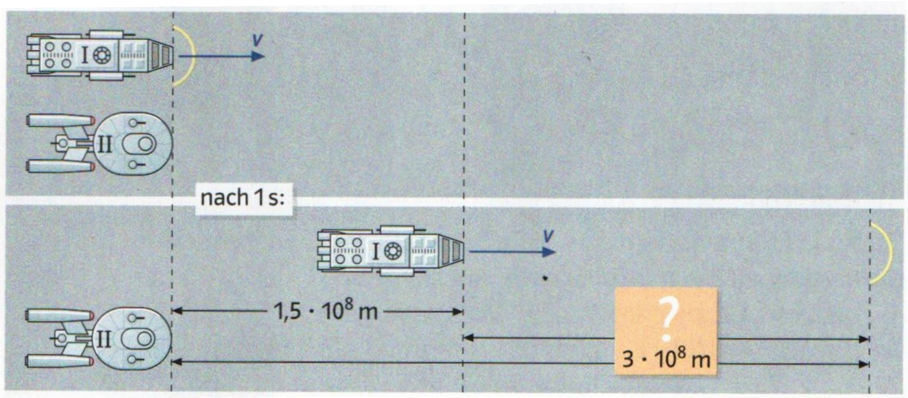
In dem hier gezeigten und dem folgenden Diagramm entspricht Akin mit seinem runden Raumschiff dem ungestrichenen System (x,t) und Beata mit ihrem eckigen Raumschiff dem gestrichenen System (x',t'). Verstehen wir den Text zunächst vom Satz *"Als Beata ... Akin passiert, leuchten kurzzeitig zwei Lampen an den Enden ihres Raumschiffs auf."* aus. Das Aufleuchten der Lampen ($\bullet$) geschieht in Beatas System zur Zeit $t' = 0$ an zwei Positionen auf der x'-Achse gleich weit vom Nullpunkt entfernt. Von diesen beiden Ereignissen lassen wir die Zukunftslichtkegel ausgehen (gestrichelt). Die Lichtsignale kommen gleichzeitig bei Beata an ($\bigcirc$), deren Weltlinie ja die t'-Achse ist. Bei Akin auf der t-Achse kommen die Lichtsignale nicht gleichzeitig an ($\times$). Für Akin haben die Lampen jedoch auch nicht gleichzeitig aufgeleuchtet. Die Zeitkoordinaten der Aufleuchtereignisse in Akins System auf der t-Achse lassen sich mit den waagerechten kurz gestrichelten Linien finden. Hingegen sind die Enden von Beatas Raumschiff jeweils gleich weit von Akin entfernt, wenn dort die Lampen aufleuchten (kurz gestrichelte senkrechte Linien zur x-Achse). Auch für Akin haben die beiden Lichtsignale gleiche Strecken zurückgelegt. Nur ist ein Signal eher (später) gestartet und kommt entsprechend eher (später) an. Mit der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist alles in Ordnung.



Lampen leuchten in Akins System auf.

Verstehen wir den Text jetzt so, wie er gemeint ist. Die Lampen leuchten an zwei Pfosten in Akins System auf, als sich Beata gerade in der Mitte dazwischen befindet. (Ob die Entfernung der Pfosten voneinander der Länge von Beatas Raumschiff entspricht, spielt hier keine Rolle; die Längenkontraktion wird an einem anderen Beispiel diskutiert.) Die Aufleuchtereignisse ($\bullet$) finden bei $t = 0$ an zwei Punkten auf der x-Achse gleich weit vom Nullpunkt entfernt statt. Wir lassen von den Aufleuchtereignissen die Zukunftslichtkegel ausgehen (gestrichelt). Natürlich treffen die Lichtsignale gleichzeitig bei Akin auf der t-Achse ein ($\bigcirc$). Bei Beata auf der t'-Achse kommen die Lichtsignale nicht gleichzeitig an ($\times$); sie erhält zuerst das Signal von der vorderen Lampe und dann das von der hinteren. Aber in ihrem Bezugssystem haben die Lampen auch nicht gleichzeitig aufgeleuchtet. Im Gegensatz zur Abbildung aus dem Schulbuch sieht man das im Minkowski-Diagramm, wenn man von den Aufleuchtereignissen die Parallelen zur x'-Achse auf die t'-Achse zieht, um eben die t'-Koordinaten des Aufleuchtens zu erhalten (kurz gestrichelte Linien). Gleich lange Distanzen entlang x' haben auch so die Lichtsignale zurückgelegt. Nur ist so für Beata ein Lichtsignal eher (später) gestartet als das andere und kommt entsprechend eher (später) an. Der Schulbuchtext folgert den nicht-gleichzeitigen Start für Beata aus dem nicht-gleichzeitigen Ankommen, was jedoch, wie gesagt, aus der Abbildung nicht verständlich wird. Das Minkowski-Diagramm zeigt, dass auch für Beata die beiden Lichtsignale in der gleichen Zeit die gleiche Strecke zurückgelegt haben (Vorsicht: Es zählen die Projektionen auf die t'- und die x'-Achse, auch wenn die Verbindungslinien jeweils von $\bullet$ nach $\times$ in der Zeichnung nicht die gleiche Länge haben.) Beim *Licht* ist es *eben gerade nicht* so, dass sich die Signalgeschwindigkeit erhöht, wenn man auf die Quelle zufährt, und sich erniedrigt, wenn man sich von der Quelle wegbewegt. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt auch in Beatas Bezugssystem für beide Lampensignale exakt c.

In *Impulse Physik Oberstufe Eingangsklasse (Berufliches Gymnasium, Klett 2021)* findet man folgende angefangene Überlegung:



B1 Gedankenversuch: Gleiche Strecken mit verschiedenen Längen

Gedankenversuch zur Lichtgeschwindigkeit
Wir nehmen an, ein Raumschiff I fliegt mit $v = 0{,}5 \cdot c$ an einem anderen Raumschiff II vorbei und sendet in diesem Moment ein Lichtsignal in Flugrichtung aus. Nach 1 s befindet sich Raumschiff I in einer Entfernung von $1{,}5 \cdot 10^8$ m, das Signal hat $3 \cdot 10^8$ m zurückgelegt.

Aus Sicht des Raumschiffs I beobachtet man jedoch, dass sich das Signal mit Lichtgeschwindigkeit entfernt. Es hat nach 1 s einen Weg der Länge $3 \cdot 10^8$ m zurückgelegt, weil in unterschiedlichen Systemen immer der gleiche Wert für die Lichtgeschwindigkeit angenommen werden muss.
Zeit- und Längenmessungen müssen daher verschiedene Werte liefern!

Es ist nicht klar, in wessen Bezugssystem Zeit und Längen in der Abbildung dargestellt sind. Und als Einführung, um auf die Notwendigkeit verschiedener Zeit- und Längenmaße in der Relativitätstheorie hinzuweisen, mag die Darstellung in Ordnung sein. Trotzdem bleibt es für den Leser unbefriedigend, dass der scheinbare Widerspruch hier nicht aufgeklärt wird.
Daher erstelle ich zu diesem Szenario Minkowski-Diagramme und führe Rechnungen aus.

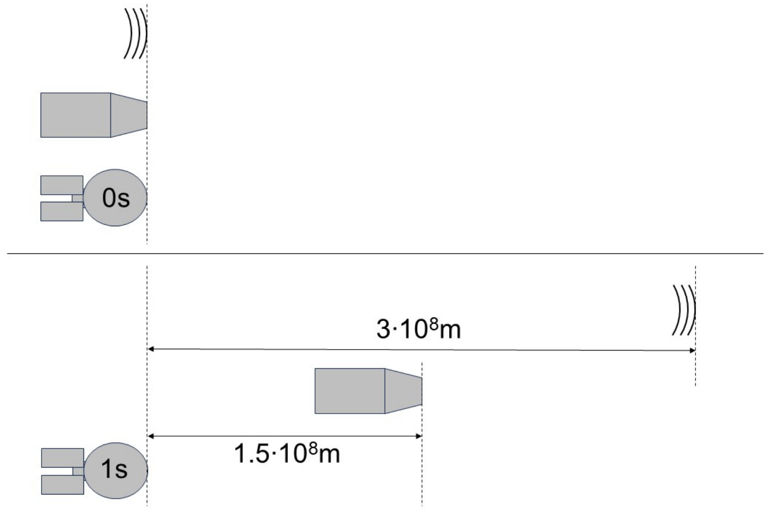
Einschub: Wir können zu den Grundlagen noch die Ergänzung brauchen, dass die sogenannte Eigenzeit immer dieselbe ist, egal, mit den Koordinaten welches Systems sie berechnet wird. Für unser ungestrichenes und gestrichenes Koordinatensystem, deren Nullpunkte zusammenfallen, heißt das: $\tau = \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c^2}} = \sqrt{t'^2 - \frac{x'^2}{c^2}}$

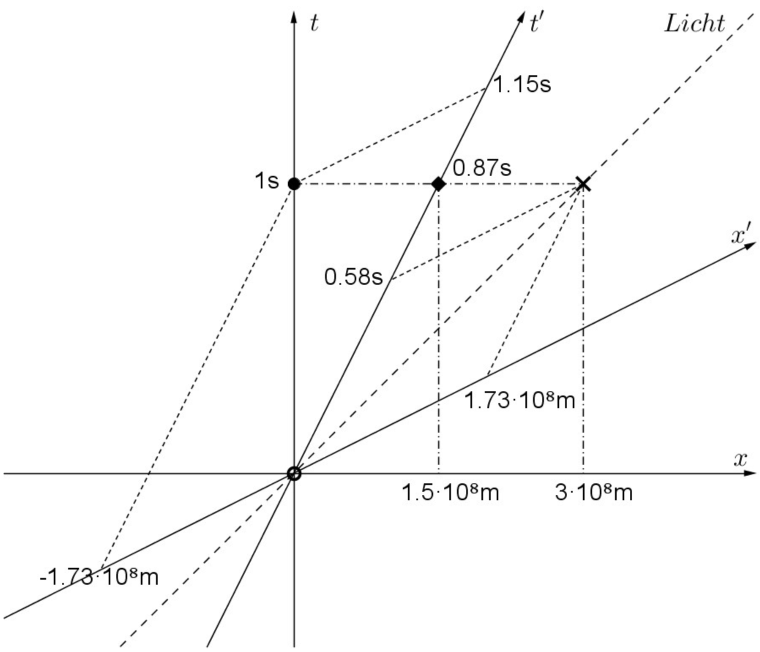
Beweis durch Einsetzen der Formeln für t' und x':

$$\begin{aligned}
\sqrt{t'^2 - \frac{x'^2}{c^2}} &= \sqrt{\left(\frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)^2 - \left(\frac{x/c - vt/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{t^2 - 2vxt/c^2 + v^2x^2/c^4}{1-(v/c)^2} - \frac{x^2/c^2 - 2vxt/c^2 + v^2t^2/c^2}{1-(v/c)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{t^2(1 - v^2/c^2) - x^2/c^2 \cdot (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c^2}}
\end{aligned}$$

q.e.d.

Da es nur ein Lichtsignal gibt, ist es egal, welches Raumschiff es aussendet. Das eckige Raumschiff I, das runde Raumschiff II und das Lichtsignal starten gleichzeitig am selben Ort.
Dem runden Raumschiff sei das ungestrichene System $(t{,}x)$ zugeordnet, dem eckigen das gestrichene $(t'{,}x')$. Start ist bei beiden Zeit- und Ortskoordinaten Null ($\circ$). Dann setzen wir uns zunächst ins Bezugssystem des runden Raumschiffs.





1s im System des runden Raumschiffs

Wenn im System des runden Raumschiffs 1s vergangen ist, befindet sich das runde Raumschiff auf der t-Achse bei t=1s ($\bullet$). Das eckige Raumschiff befindet sich bei t=1s und x=$1.5 \cdot 10^8$m ($\blacklozenge$). Das Lichtsignal befindet sich bei t=1s und x=$3 \cdot 10^8$m ($\times$).

Im System des eckigen Raumschiffs sind aber erst

$$t' = \sqrt{(1\,\text{s})^2 - \left(\frac{1.5 \cdot 10^8\,\text{m}}{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}\right)^2}$$

$= 0.87\,$s vergangen (Eigenzeit).
[Für $\blacklozenge$ nach der Lorentstransformation t' ausrechnen mit t=1s und x=$1.5 \cdot 10^8$m tut es auch.]

Das Ereignis $\bullet$ ist im gestrichenen System bei

$$t' = \frac{1\,\text{s}}{\sqrt{1-\left(\frac{1.5\cdot 10^8\,\text{m/s}}{3\cdot 10^8\,\text{m/s}}\right)^2}} = 1.15\,\text{s} \quad \text{und} \quad x' = \frac{-1.5\cdot 10^8\,\text{m/s}\cdot 1\,\text{s}}{\sqrt{1-\left(\frac{1.5\cdot 10^8\,\text{m/s}}{3\cdot 10^8\,\text{m/s}}\right)^2}} = -1.73\cdot 10^8\,\text{m}$$

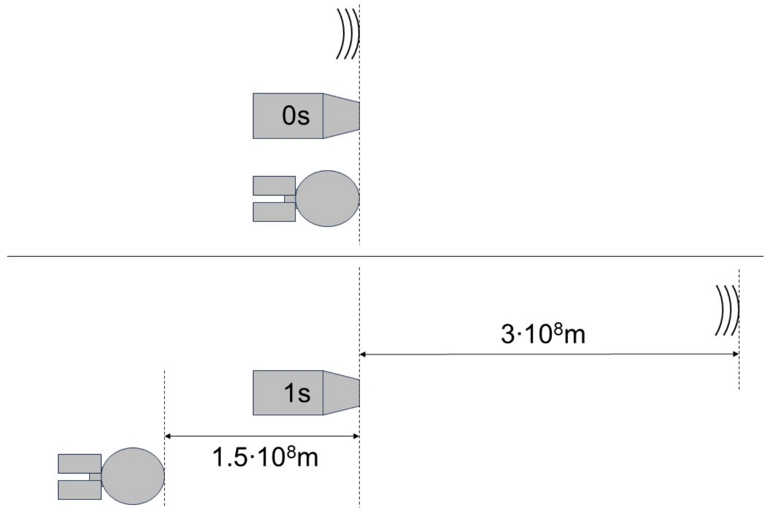
Das Ereignis $\times$ ist im gestrichenen System bei

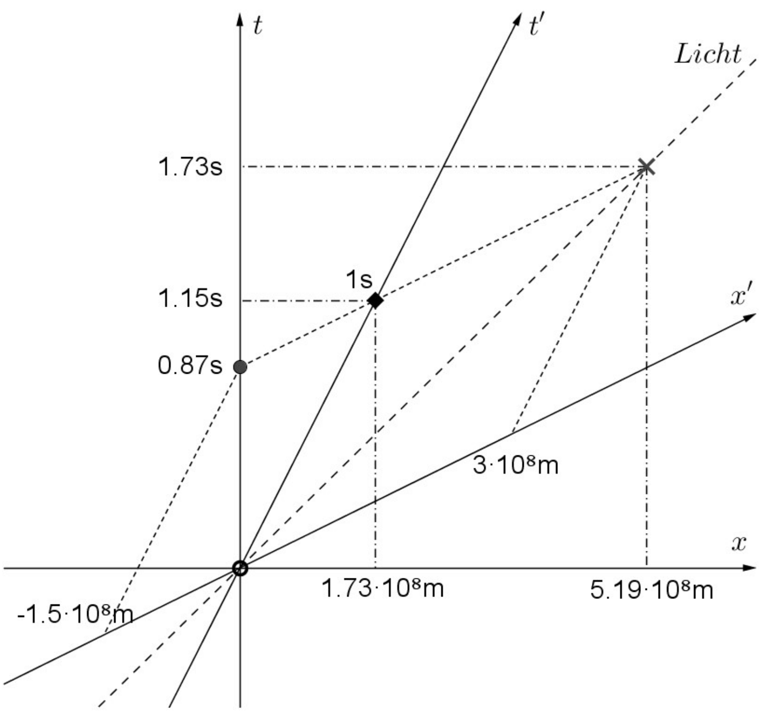
$$t' = \frac{1\,\text{s} - \frac{1.5\cdot 10^8\,\text{m/s}}{(3\cdot 10^8\,\text{m/s})^2}\cdot 3\cdot 10^8\,\text{m}}{\sqrt{1-\left(\frac{1.5\cdot 10^8\,\text{m/s}}{3\cdot 10^8\,\text{m/s}}\right)^2}} = 0.58\,\text{s} \quad \text{und} \quad x' = \frac{3\cdot 10^8\,\text{m} - 1.5\cdot 10^8\,\text{m/s}\cdot 1\,\text{s}}{\sqrt{1-\left(\frac{1.5\cdot 10^8\,\text{m/s}}{3\cdot 10^8\,\text{m/s}}\right)^2}} = 1.73\cdot 10^8\,\text{m}$$

Es ist also wichtig, dass wir im unteren Teil der Skizze die Uhr in das runde Raumschiff gesetzt haben. Vom eckigen Raumschiff würde man nicht gleichzeitig das runde Raumschiff hinter sich und das Lichtsignal vor sich in der gleichen Entfernung beobachten.

Setzen wir uns nun in das eckige Raumschiff. Von diesem aus gesehen bewegt sich das runde Raumschiff mit halber Lichtgeschwindigkeit nach hinten und das Signal natürlich mit Lichtgeschwindigkeit nach vorne.

Wenn im System des eckigen Raumschiffs 1s vergangen ist, befindet sich das eckige Raumschiff auf der t'-Achse bei t'=1s (♦). Das runde Raumschiff befindet sich bei t'=1s und x'=$-1.5 \cdot 10^8$m (•). Das Lichtsignal befindet sich bei t'=1s und x'=$3 \cdot 10^8$m (×).





1s im System des eckigen Raumschiffs

Im System des runden Raumschiffs sind erst

$$t = \sqrt{(1\,\mathrm{s})^2 - \left(\frac{-1.5 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}\right)^2}$$

$= 0.87\,\mathrm{s}$ vergangen (Eigenzeit). [Für • nach der Lorentztransformation t ausrechnen mit t'=1s und x'=$-1.5 \cdot 10^8$m tut es auch.]

Das Ereignis ♦ ist im ungestrichenen System bei

$$t = \frac{1\,\mathrm{s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1.5 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}\right)^2}} = 1.15\,\mathrm{s}$$

und bei x=

$$\frac{1.5 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1.5 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}\right)^2}} = 1.73 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$$

Das Ereignis × ist im ungestrichenen System bei

$$t = \frac{1\,\mathrm{s} + \frac{1.5 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{(3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2} \cdot 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1.5 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}\right)^2}} = 1.73\,\mathrm{s} \quad \text{und} \quad x = \frac{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m} + 1.5 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,\mathrm{s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1.5 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}\right)^2}} = 5.19 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$$

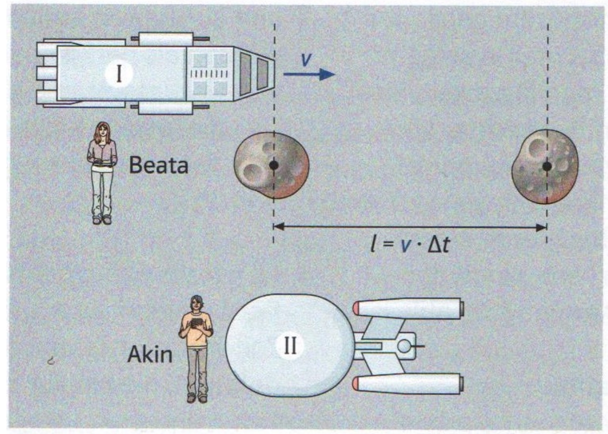
Hier ist es wichtig, dass im unteren Teil der Skizze die Uhr im eckigen Raumschiff angesiedelt ist. Vom runden Raumschiff aus wird man nicht gleichzeitig das Lichtsignal dreimal so weit vor sich verorten wie das eckige Raumschiff, das mit halber Lichtgeschwindigkeit weggeflogen ist und das Lichtsignal ausgesandt haben kann. Im System des runden Raumschiffs sind das eckige Raumschiff und das Lichtsignal, so wie sie im unteren Teil der Skizze eingezeichnet sind, nicht gleichzeitig.

Ebenfalls in *Impulse Physik Oberstufe (Klett 2022)* findet man zur Längenkontraktion:

Gedankenexperiment zur Längenmessung

Zwei Asteroiden befinden sich relativ zu Raumschiff II in Ruhe. Raumschiff I fliegt mit der konstanten Relativgeschwindigkeit v geradlinig von einem zum anderen Asteroiden. In Akins Inertialsystem (Raumschiff II) befinden sich die Asteroiden im Abstand l zueinander (→**B2**). Für die Zeit, in der Raumschiff I von einem zum anderen Asteroiden fliegt, misst Akin $\Delta t = l/v$.
Beata bestimmt an Bord des Raumschiffes I mit Hilfe ihrer Armbanduhr (Eigenzeit) die Zeitdauer $\Delta t'$, in der die beiden Asteroiden nacheinander mit der Geschwindigkeit v an ihr vorbeifliegen. Damit misst sie für den Abstand der Asteroiden $l' = v \cdot \Delta t'$.
Wegen der Zeitdilatation gilt $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$.

Dabei ist der Lorentzfaktor $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

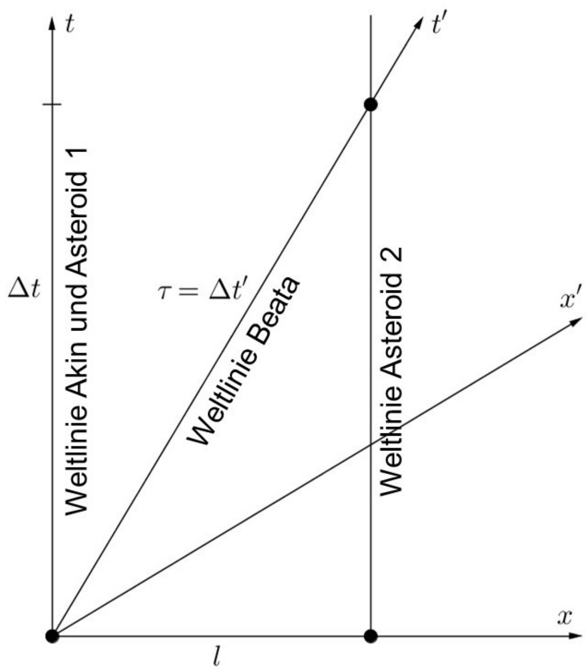


B2 Beschreibung in Akins Inertialsystem

Daraus folgt:

$l' = v \cdot \frac{\Delta t}{\gamma} = v \cdot \frac{l}{\gamma \cdot v} = \frac{l}{\gamma}$ sodass $l' \leq l$

Beata misst demzufolge einen kürzeren Abstand der beiden Asteroiden als Akin.



Diese Argumentation ist soweit in Ordnung, sofern man die Zeitdilatation vorher etabliert hat. In Akins System braucht Beata Δt, um die Distanz l zwischen den Asteroiden zu durchfliegen. In ihren eigenen System berechnen wir die Zeit über die Lorentztransformation oder als die Eigenzeit

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\cdot l}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\frac{l}{v} - \frac{v}{c^2}\cdot l}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

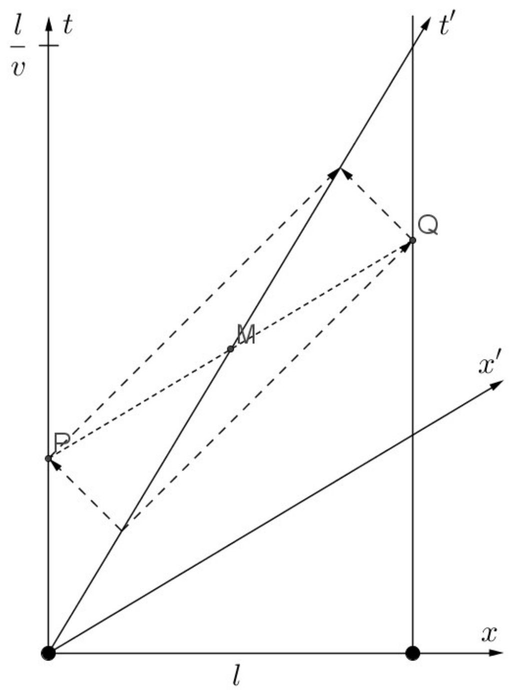
$$= \frac{\frac{l}{v}\cdot\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$= \tau = \sqrt{(\Delta t)^2 - \left(\frac{l}{c}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{l}{v}\right)^2 - \left(\frac{l}{c}\right)^2}$$

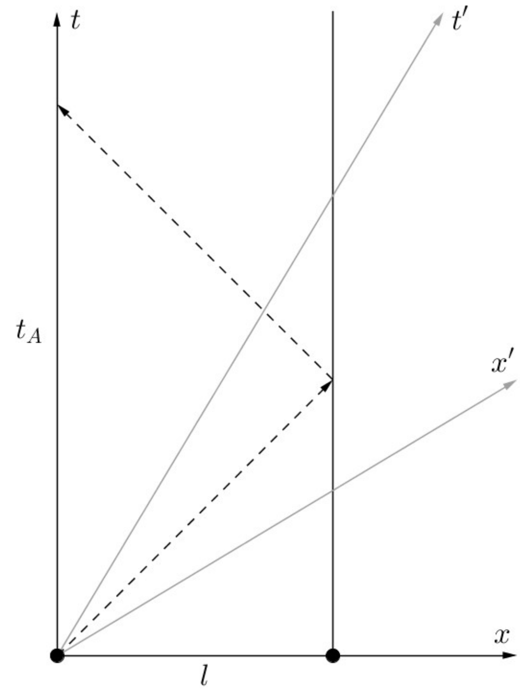
$$= \frac{l}{v}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

In ihren eigenen System legt Beata zwar keine Strecke zurück. Sie weiß jedoch, dass sie sich gegenüber Akin und den Asteroiden mit der Geschwindigkeit v bewegt. Insofern ist es legitim, die aus ihrer Sicht zurückgelegte Strecke als $l' = v \cdot \Delta t' = l \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ zu berechnen.

Man kann argumentieren, dass Entfernungsmessungen sicher korrekt nur über Lichtlaufzeiten zu bekommen sind. Beata kann ein Lichtsignal nach hinten und vorn aussenden, das an den Asteroiden reflektiert wird und gleichzeitig von beiden zu ihr zurückkommt. (Oder sie sendet laufend Lichtsignale aus und wählt zur Auswertung dann dasjenige aus, das gleichzeitig von beiden Asteroiden zu ihr zurückgekommen ist.) Wie lange braucht das Lichtsignal zu einem Asteroiden und zu ihr zurück? Wann und wo hat sie das Signal ausgesendet? Für die Entfernungsbestimmung müssen wir die zweite Frage gar nicht beantworten, aber die Antwort wäre auch interessant.



Beata misst Asteroidenentfernung mit Licht



Akin misst Asteroidenentfernung mit Licht

Das Rechteck aus Beatas Lichtsignalen liegt symmetrisch um den Mittelpunkt M bei $x_M = l/2$ und $t_M = l/(2v)$ im ungestrichenen System. Im gestrichenen System haben wir nach der Lorentztransformation dort die Zeit

$$t'_M = \frac{\frac{l}{2v} - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{l}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{l}{2v} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Die zweite Diagonale des Rechtecks liegt parallel zur x'-Achse. Daher finden in Beatas System die Reflexionen an den Asteroiden zu der eben berechneten Zeit bei P und Q statt. Für diese haben wir eine gemischte Kenntnis von Koordinaten. P ist bei $x_P = 0$ und $t'_P = \frac{l}{2v} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$

Nach Einsetzen in die Lorentztransformation $x = \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ lösen wir nach x'_P auf.

$$0 = \frac{x'_P + v \cdot \frac{l}{2v} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad x'_P = -\frac{l}{2} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Q liegt bei $x_Q = l$ und $t'_Q = \frac{l}{2v} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$

Durch Einsetzen in die genannte Lorentztransformation lösen wir nach x'_Q auf.

$$l = \frac{x'_Q + v \cdot \frac{l}{2v} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad x'_Q = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Von jedem Asteroiden braucht das Licht $\frac{l}{2c} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ zu Beata, also liegen die Asteroiden für sie $l' = l \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ auseinander. Akin, der sich bei einem Asteroiden befindet, würde die Entfernung zum anderen mit einem Lichtsignal wie im rechten Diagramm auf der vorherigen Seite messen und $t_A = 2l/c$ erhalten. (Akins Diagramm ist aus Platzgründen in etwas kleinerem Maßstab gezeichnet; die Längen l auf der x-Achse sind in beiden Diagrammen gleich.)

Für die freaks stellt sich wie gesagt noch die Frage, wann nach ihrer Zeit Beata das Lichtsignal aussenden muss und wo in Bezug auf die Asteroiden sie sich zu dieser Zeit gerade befindet. Von der Aussendung bis zur Reflexion an den Asteroiden hat es in Beatas System $\frac{l}{2c} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ gedauert, also geschah die Aussendung S bei

$$t'_S = t'_P - \frac{l}{2c} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{l}{2v} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{l}{2c} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \left(\frac{l}{2v} - \frac{l}{2c}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Analog geschieht der Empfang bei E auf Beatas Uhr bei

$$t'_E = t'_P + \frac{l}{2c} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{l}{2v} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{l}{2c} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \left(\frac{l}{2v} + \frac{l}{2c}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Wo befinden sich die Asteroiden für Beata zu diesen Zeiten? Wiederum aus gemischten Koordinaten berechnen wir mit diesem t'_S und $x_{S,A1} = 0$ und $x_{S,A2} = l$ aus derselben Lorentztransformation wie oben und dann analog für E die gestrichenen Asteroidenkoordinaten:

$$x_{S,A1} = \frac{x'_{S,A1} + v \cdot t'_S}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad 0 = \frac{x'_{S,A1} + v \cdot \left(\frac{l}{2v} - \frac{l}{2c}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad x'_{S,A1} = -\frac{l}{2} \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

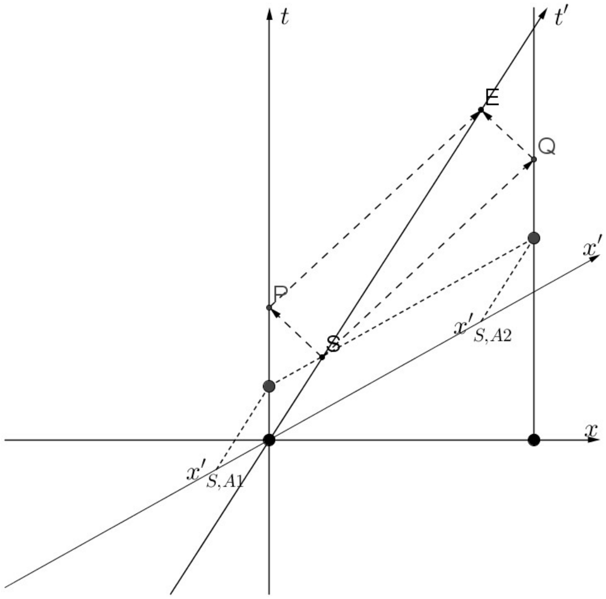
$$x_{S,A2} = \frac{x'_{S,A2} + v \cdot t'_S}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad l = \frac{x'_{S,A2} + v \cdot \left(\frac{l}{2v} - \frac{l}{2c}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad x'_{S,A2} = \frac{l}{2} \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$x_{E,A1} = \frac{x'_{E,A1} + v \cdot t'_E}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad 0 = \frac{x'_{E,A1} + v \cdot \left(\frac{l}{2v} + \frac{l}{2c}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad x'_{E,A1} = -\frac{l}{2} \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

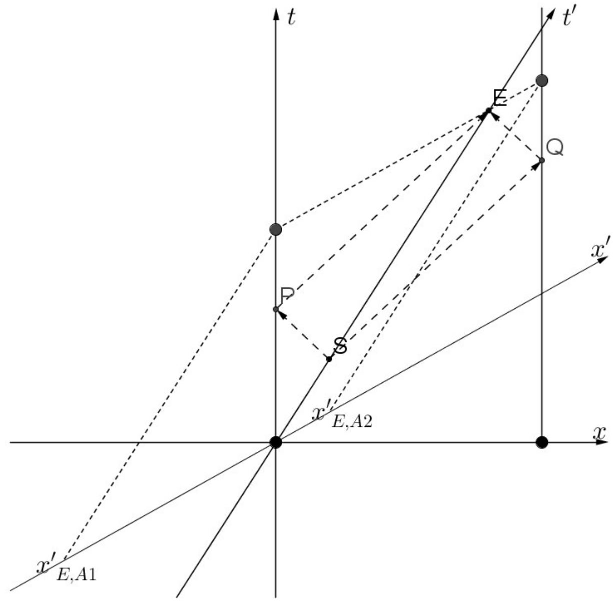
$$x_{E,A2} = \frac{x'_{E,A2} + v \cdot t'_E}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad l = \frac{x'_{E,A2} + v \cdot \left(\frac{l}{2v} + \frac{l}{2c}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad x'_{E,A2} = \frac{l}{2} \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\frac{|x_{S,A1}|}{|x_{S,A2}|} = \frac{c-v}{c+v} \qquad \text{und} \qquad \frac{|x_{E,A1}|}{|x_{E,A2}|} = \frac{c+v}{c-v}$$

Durch Beatas Geschwindigkeit zusammen mit der Lichtgeschwindigkeit ist ein einfaches Verhältnis gegeben, das die Abstände von Beatas Raumschiff zu den Asteroiden haben müssen in den Momenten, in denen Beata das Lichtsignal aussenden muss bzw. es von beiden Asteroiden dann gleichzeitig empfängt.



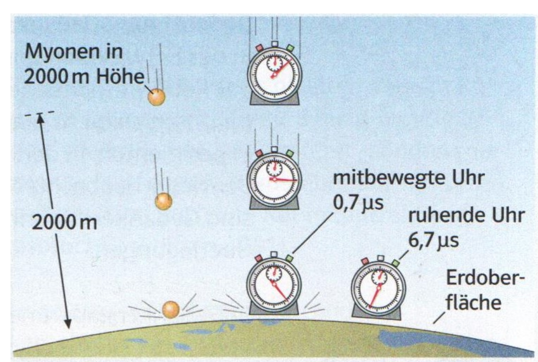
die Asteroiden für Beata beim Senden



die Asteroiden für Beata beim Empfangen

Für Beata sind die Asteroiden natürlich so wie für Akin nicht gleichzeitig unten auf der x-Achse. Aber sie so dort auch einzuzeichnen hilft zum Wiedererkennen ihrer Weltlinien. Weiter oben sind die Asteroiden gezeichnet, wie sie für Beata bei S und E gleichzeitig sind. Der Winkel der gestrichenen Achsen im Bild entspricht $v = 0.6\,c$. Die Abstände der gestrichenen Asteroidenortskoordinaten vom Ursprung $x' = 0$ stehen im Verhältnis $(1 - 0.6) : (1 + 0.6) = 1 : 4$ bzw. $(1 + 0.6) : (1 - 0.6) = 4 : 1$.

In allen Schulbüchern findet sich berechtigterweise das Beispiel des Myonenzerfalls in der Atmosphäre. Die hier gezeigte anschauliche Abbildung ist aus *Impulse Physik Oberstufe Eingangsklasse (Berufliches Gymnasium, Klett 2021)* bzw. *Impulse Physik Oberstufe (Klett 2022)* übernommen. Es ist ein reales Beispiel, an dem sich der Zeitdilatationsfaktor in Reinform zeigt. Für die Vollständigkeit bezüglich der Schulbuchbeispiele zeichne ich auch für die Myonen ein Minkowski-Diagramm,

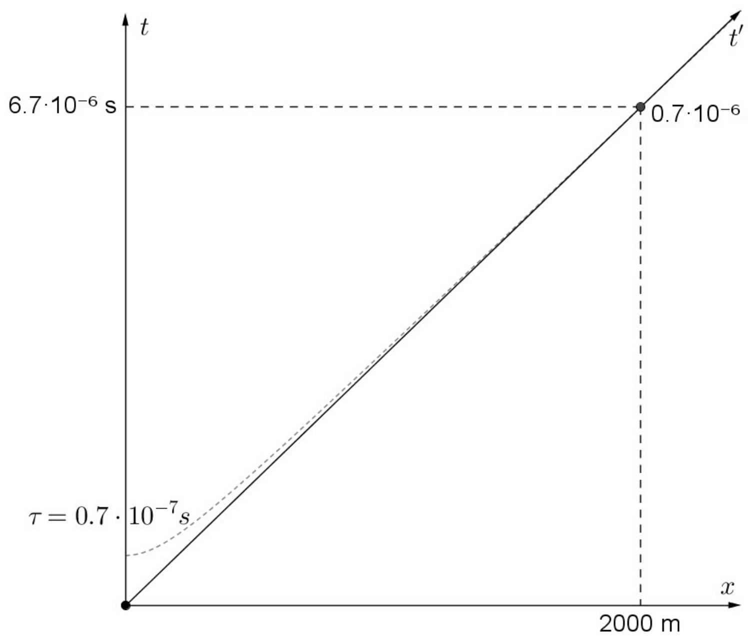


welches einen Fall extrem hoher Geschwindigkeit nahe der Lichtgeschwindigkeit illustriert. Hier geht es um die theoretische Rechnung. Von der Messung, deren praktische Durchführung in den genannten Büchern gut beschrieben ist, werden im Folgenden nur die Zahlenwerte übernommen. In ca. 10 km Höhe entstehen durch die Wechselwirkung der kosmischen Strahlung mit Molekülen der Atmosphäre Myonen. Sie bewegen sich mit 99.5% der Lichtgeschwindigkeit, also $v = 2.985 \cdot 10^8$ m/s. In 10 km Höhe kann man noch keine stationäre Messapparatur aufstellen, in 2000 m über dem Meeresspiegel auf einem Berg schon. Und natürlich zum Vergleich auf Höhe des Meeresspiegels (0 m) auch.

Myonen zerfallen mit einer Halbwertszeit von $2.2 \cdot 10^{-6}$ s. Für 2000 m benötigen die Myonen $t = 2000\,\mathrm{m}/(2.985 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}) = 6.7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$. In 2000 m Höhe werden 570 Myonen pro Flächen- und Zeiteinheit registriert. Nicht-relativistisch würde man nach dem exponentiellen Zerfall am Boden bei 0 m also $570 \cdot e^{-6.7 \cdot 10^{-6}\mathrm{s}/2.2 \cdot 10^{-6}\mathrm{s}} = 27$ Myonen pro Flächen- und Zeiteinheit erwarten. Tatsächlich sind es aber ca. 410. Das liegt daran, dass im bewegten Bezugssystem der Myonen die Zeit langsamer vergeht, und danach richtet sich der Zerfall. Die Eigenzeit, die für die Myonen vergeht, beträgt

$$\tau = \sqrt{(6.7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s})^2 - \left(\frac{2000\,\mathrm{m}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}\right)^2} = t' = 6.7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2.985 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}\right)^2} = 0.7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$$

Und danach sollten wir nach 2000 m am Boden von 570 Myonen noch $570 \cdot e^{-0.7 \cdot 10^{-6}\mathrm{s}/2.2 \cdot 10^{-6}\mathrm{s}} = 415$ haben; das stimmt recht gut mit dem Messwert überein.



Minkowski-Diagramm zum Myonenzerfall

Im Minkowski-Diagramm ist hier vom Bezugssystem der Myonen nur die t'-Achse, nicht die x'-Achse gezeichnet. Sie liegen beide so nahe an der Lichtgeraden (der Winkelhalbierenden), dass sie nicht mehr unterscheidbar wären. Aber mit $v = 2.985 \cdot 10^8$ m/s ist die t'-Achse noch ein wenig steiler als die Lichtgerade. Die t'-Achse hat noch einen Schnittpunkt mit der Hyperbel $t = \sqrt{(0.7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s})^2 + (x/c)^2}$ zur Eigenzeit $\tau = 0.7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$.

noch eine Anmerkung:

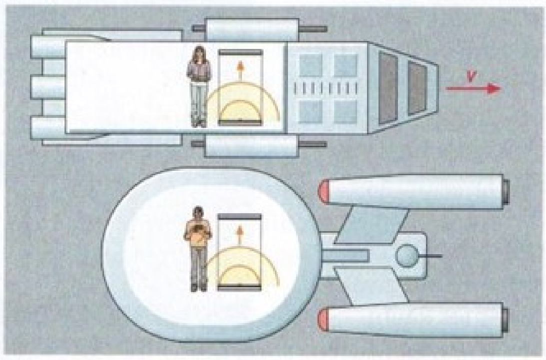
Die Strecke von 2000 m sehen die Myonen auf $2000\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2.985 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}\right)^2} = 199.7\,\mathrm{m}$

verkürzt, die Strecke von 8000 m (von der Höhe 10000 m auf 2000 m) entsprechend auf 799 m verkürzt. Wenn sie für die erstgenannte Strecke $0.7 \cdot 10^{-6}$ s brauchen, brauchen sie für die zweitgenannte $2.8 \cdot 10^{-6}$ s. Das ist von ihrer Entstehung bis zum oberen ersten Detektor mehr als eine Halbwertszeit. Die Halbwertszeit bedeutet ja aber nicht, dass zu dieser Zeit schlagartig alle Myonen zerfallen, sondern gibt uns nur den Verlauf ihres exponentiellen Zerfalls an. Im System des Beobachters auf der Erde sind in 2000 m Höhe noch genug Myonen übrig. Rechnen wir einmal zurück, wieviele es pro Flächen- (bzw. Raumwinkel-) und Zeiteinheit in 10 km Höhe waren: $570 = N_0 \cdot e^{-2.8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}/2.2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}}$ $N_0 = 2035$

Das gängige Gedankenexperiment in Schulbüchern zur Zeitdilatation ist die Lichtuhr, die den Dilatationsfaktor auf einen einfachen Pythagoras zurückführt. Hier eine Schulbuchdarstellung, wiederum aus *Impulse Physik Oberstufe (Klett 2022)*:

Lichtuhren

Einstein nutzte in seinen Gedankenexperimenten Lichtuhren zur Zeitmessung. Zwischen zwei Spiegeln wird ein Lichtsignal hin und her reflektiert (→**B1**). In der Lichtuhr erfolgt immer dann ein „Tick“, wenn das Lichtsignal an einem der Spiegel reflektiert wird. Wegen der konstanten Lichtgeschwindigkeit tickt die Lichtuhr in einem periodischen Takt.



B3 Beobachter in verschiedenen Inertialsystemen

Gedankenexperiment zur Zeitmessung

Beata und Akin sind Beobachter in zwei zueinander gleichförmig bewegten Raumschiffen (→**B3**), die den Takt ihrer Lichtuhren miteinander vergleichen. Im Gedankenexperiment bewegen sich beide Raumschiffe auf derselben Geraden und können durcheinander hindurchfliegen.
Als Beata Akin passiert und sich ihre Lichtuhren genau überdecken, leuchtet ein Lichtblitz an den unteren Spiegeln auf (→**B4a**). Akin beobachtet, dass die Lichtwelle in seiner Uhr den oberen Spiegel erreicht, während das Licht in Beatas Uhr noch nicht am oberen Spiegel angelangt ist (→**B4b**).

Das bedeutet, dass Beatas Uhr aus Akins Bezugssystem heraus beurteilt langsamer tickt als seine eigene Uhr. Wenn die Lichtwelle aus Akins Sicht den oberen Spiegel von Beatas Uhr erreicht (→**B4c**), wurde das Licht in Akins Uhr bereits reflektiert.

Akin misst in seinem Inertialsystem S für die Zeit zwischen zwei Ticks von Beatas Uhr die Zeitdauer Δt. Beata misst in ihrem Inertialsystem S′ zwischen zwei Ticks ihrer eigenen Uhr die Zeitdauer $\Delta t'$. Mit Hilfe von Abbildung **B4c** ergibt sich:

$$(c \cdot \Delta t)^2 = (c \cdot \Delta t')^2 + (v \cdot \Delta t)^2$$

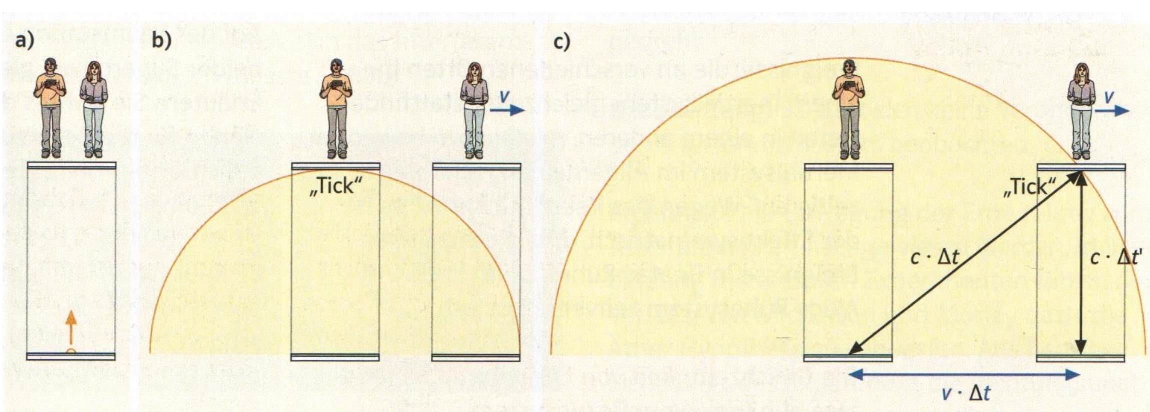
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \cdot \Delta t'$$

$$\Delta t \geq \Delta t'$$

Dabei ist $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \geq 1$ der Lorentz-Faktor.

Für denselben Vorgang messen die beiden Beobachter in ihren verschiedenen Bezugssystemen unterschiedliche Zeitdauern. Für Akin tickt Beatas Uhr langsamer als seine eigene.

Relativ zu einem Inertialsystem bewegte Uhren gehen für Beobachter in diesem Inertialsystem langsamer als ruhende Uhren.



B4 Zeitpunkt t_0 (a), Zeitpunkt $t_1 > t_0$ (b), Zeitpunkt $t_2 > t_1$ (c)

Der Pythagoras funktioniert, weil der Strahlengang in der Lichtuhr senkrecht zur relativen Bewegungsrichtung der beiden Raumschiffe gewählt wird. Man fragt sich, wie die Rechnung gehen und zum selben Dilatationsfaktor führen kann, wenn man die Lichtuhren um 90 Grad in Bewegungsrichtung der Raumschiffe dreht; die Schwierigkeit hatte der Gedankenversuch aus dem Eingangsklasse-Buch aufgeworfen, den ich auf Seite 4-6 aufgearbeitet habe. Wieso geht es zum einen mit der senkrecht zur Flugrichtung tickenden Lichtuhr jetzt so geometrisch einfach? Und zum anderen fragt man sich, wieso man ein anderes Bild mit dem rechtwinkligen Dreieck umgekehrt zeichnen soll, wenn man die Rollen von von Beobachter und Beobachtetem tauscht. Wieso sollten dann andere Zeiten für die Lichtuhren gemessen werden, so dass der Satz “Bewegte Uhren gehen langsamer“ auch aus Sicht des anderen Raumschiffs gilt?
Siehe zum Verständnis, welche Ereignisse in welchem Bezugssystem gleichzeitig sind, den Abschnitt *Zeitdilatation und Längenkontraktion* aus meinem vorangegangenen Aufsatz zur speziellen Relativitätstheorie. Hier soll es darum gehen, die Lichtuhr mit zwei Raumrichtungen x (x') und y und einer Zeitrichtung t (t') darzustellen, um zu sehen, ob der Pythagoras aus den Schulbüchern in einem Minkowski-Diagramm wiederzufinden ist.
Akins rundes Raumschiff entspricht dem ungestrichenen System (x,y,t), Beatas eckiges Raumschiff dem gestrichenen System (x',y',t'). Beatas Raumschiff bewegt sich in Akins System entlang der x-Achse. Die Strahlen der Lichtuhren laufen in y- bzw. y'-Richtung, was dasselbe ist. Wir betrachen das Licht in Beatas Lichtuhr in Akins Bezugssystem. Δt sei die Zeit, die es vom unteren Ende der Lichtuhr bis zum oberen braucht. In dieser Zeit bewegt sich das obere Ende der Lichtuhr mit Beatas Raumschiff um $v \cdot \Delta t$ in x-Richtung, und das Licht muss das ebenfalls. Das Licht bewegt sich mit c. Wenn seine Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung v ist, beträgt seine Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung $\sqrt{c^2 - v^2}$. In y-Richtung hat das Licht die Strecke $\sqrt{c^2 - v^2} \cdot \Delta t$ zurückgelegt und in der xy-Ebene den Weg $c \cdot \Delta t$. In Akins System ist Beatas Licht in der Zeit Δt vom Ursprung O zum Punkt A($x = v \cdot \Delta t$, $y = \sqrt{c^2 - v^2} \cdot \Delta t$, $t = \Delta t$) gekommen [Bild 1]. Es ist auch noch der Rückweg des Lichtstrahls von A nach B eingezeichnet, wobei B in Akins System der Punkt B($x = 2 \cdot v \cdot \Delta t$, $y = 0$, $t = 2 \cdot \Delta t$) ist.

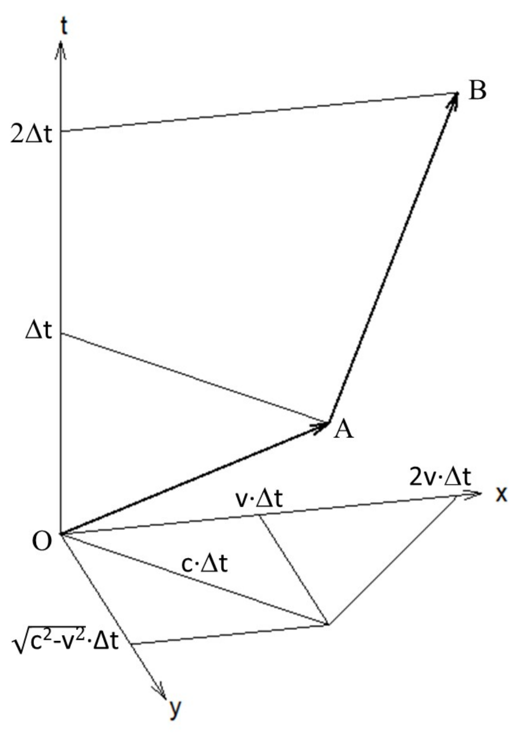


Bild 1 zur Lichtuhr

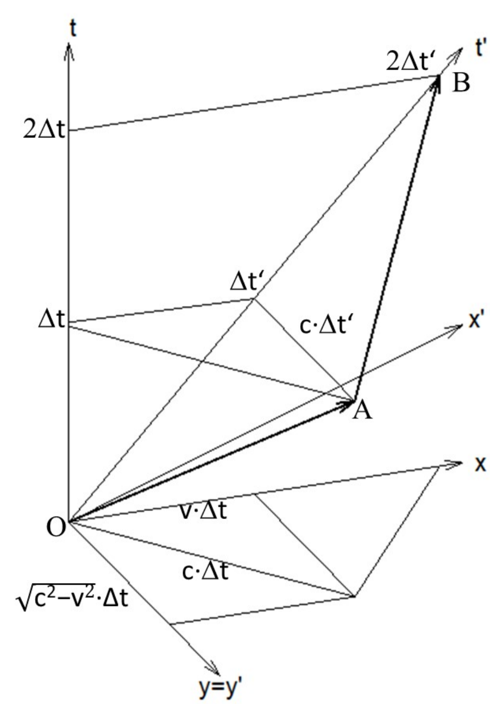


Bild 2 zur Lichtuhr

In Bild 2 ist Beatas gestrichenes Koordinatensystem mit eingezeichnet. Vom Start im Ursprung O bis zum Ereignis A, dass ihr Lichtstrahl am oberen Ende ihrer Uhr reflektiert wird, vergeht in ihrem Bezugssystem die Zeit $\Delta t'$. In ihrem Bezugssystem läuft das Licht nur in y'-Richtung, also in dieser Richtung mit der Geschwindigkeit c. Der Punkt A hat in Beatas System die Koordinaten $x' = 0$, $y' = c \cdot \Delta t'$, $t' = \Delta t'$. Der Punkt bei Rückkehr des Lichtsignals zum unteren Spiegel ist im gestrichenen System B($x' = 0$, $y' = 0$, $t' = 2\Delta t'$). Projiziert auf die xy-Ebene oder eine Etage höher auf Höhe Δt in Akins System gibt es also tatsächlich im Minkowski-Diagramm das rechtwinklige Dreieck mit Hypotenuse $c \cdot \Delta t$ und Katheten $v \cdot \Delta t$ und $c \cdot \Delta t'$. Man kann auch durch den direkten Vergleich der Strecke von A nach $\Delta t'$ auf der t'-Achse mit dem Abschnitt auf der y-Achse unten die Identität $c \cdot \Delta t' = \sqrt{c^2 - v^2} \cdot \Delta t$ erhalten. Mit der Definition des Lorentzfaktors γ schreibt sich die Beziehung zwischen Δt und $\Delta t'$ schöner nach Δt aufgelöst wie in der Schulbuchdarstellung. Wieherum die Gleichung notiert wird, ist unerheblich. Ich löse nach meiner ersten Überlegung nach $\Delta t'$ auf; die zweite Überlegung steigt gleich in der zweiten Zeile ein.

$$(v \cdot \Delta t)^2 + (c \cdot \Delta t')^2 = (c \cdot \Delta t)^2 \qquad \Rightarrow \qquad c^2 \cdot (\Delta t')^2 = c^2 \cdot (\Delta t)^2 - v^2 \cdot (\Delta t)^2$$

$$\Rightarrow \qquad c \cdot \Delta t' = \sqrt{c^2 - v^2} \cdot \Delta t \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t' = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \cdot \Delta t$$

Da Δt als die Zeit definiert wurde, die das Licht für Akin in Beatas Uhr zwischen den Spiegeln braucht und es so auch eine Strecke in x-Richtung zurücklegt, müssen die Uhren so gebaut sein, dass ihre Länge in y- bzw. y'-Richtung $\sqrt{c^2 - v^2} \cdot \Delta t$ beträgt; auch Akins Uhr! Das Licht seiner eigenen Uhr ist für ihn eher wieder zurück bei $y = 0$ als das Licht in Beatas Uhr. In Akins System läuft das Licht seiner Uhr vom Ursprung O zum Punkt C($x = 0$, $y = \sqrt{c^2 - v^2} \cdot \Delta t$, $t = \sqrt{c^2 - v^2} \cdot \Delta t/c$) und auf dem Rückweg zu D($x = 0$, $y = 0$, $t = 2\sqrt{c^2 - v^2} \cdot \Delta t/c$). Bild 3 zeigt die Lichtsignale in Beatas und in Akins Uhr in Akins ungestrichenem System.

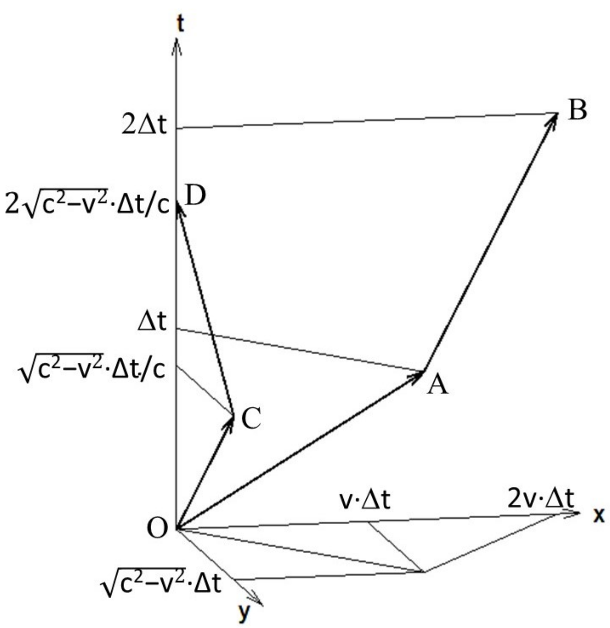


Bild 3 zur Lichtuhr

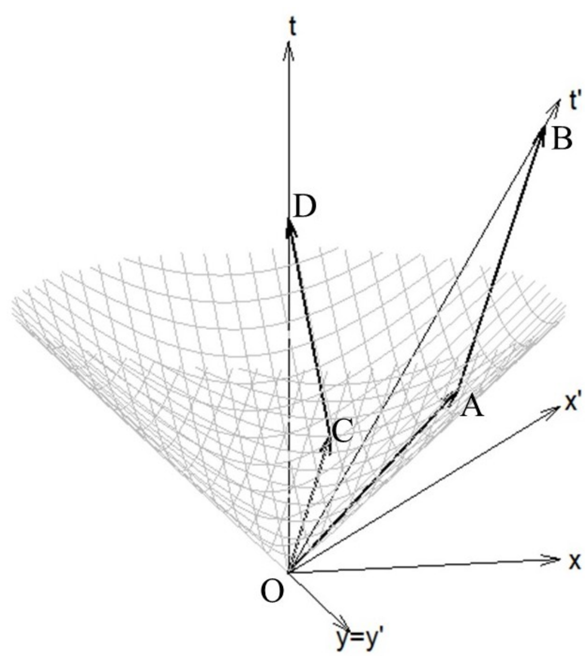


Bild 4 zur Lichtuhr

In Bild 4 sind außer den Achsen nur die beiden Lichtsignale gezeichnet, sowie der Zukunftslichtkegel vom Ursprung aus. Die beiden Vektoren $\overrightarrow{OC}$ und $\overrightarrow{OA}$ liegen auf dem Lichtkegel. Wie die Winkelhalbierenden in den zweidimensionalen Minkowski-Diagrammen ist der Lichtkegel hier übrigens derselbe für das ungestrichene wie für das gestrichene System! (Wir sind in der speziellen Relativitätstheorie, nicht in der allgemeinen, wo Gravitation Lichtkegel verformt.)

Unser Diagramm hat herausgearbeitet, dass in Akins System Beatas Uhr langsamer läuft als Akins. Wie ist mit bzw. in diesem Diagramm einzusehen, dass in Beatas System Akins Uhr langsamer läuft als Beatas? Die Ereignispunkte bleiben im Minkowski-Diagramm für beide Bezugssysteme dieselben. Die Punkte O (Start), A (erste Reflektion in Beatas Uhr), B (zweite Reflexion in Beatas Uhr), C (erste Reflexion in Akins Uhr) und D (zweite Reflexion in Akins Uhr) haben wir also bereits. Um weitere Verwirrung zu vermeiden, bezeichne ich jetzt:
mit $\Delta t_{AkinsUhr}$ die Zeit für einen Lichtweg in Akins Uhr gemessen in Akins System,
mit $\Delta t_{BeatasUhr}$ die Zeit für einen Lichtweg in Beatas Uhr gemessen in Akins System,
mit $\Delta t'_{AkinsUhr}$ die Zeit für einen Lichtweg in Akins Uhr gemessen in Beatas System,
mit $\Delta t'_{BeatasUhr}$ die Zeit für einen Lichtweg in Beatas Uhr gemessen in Beatas System.

In der Schulbuchdarstellung und aus Bild 2 hatten wir $\Delta t'_{BeatasUhr} = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \cdot \Delta t_{BeatasUhr}$ gesehen. $\Delta t_{AkinsUhr} = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \cdot \Delta t_{BeatasUhr}$ wissen wir auch schon aus Bild 3. Das liegt jedoch nur an der Forderung gleicher Größe der Uhren, die zum Beweis des Satzes "Bewegte Uhren gehen langsamer" nicht unbedingt nötig ist. Aber wie sieht Beata Akins Uhr? In welchem Zusammenhang steht $\Delta t'_{AkinsUhr}$ zu den bis jetzt genannten Größen?

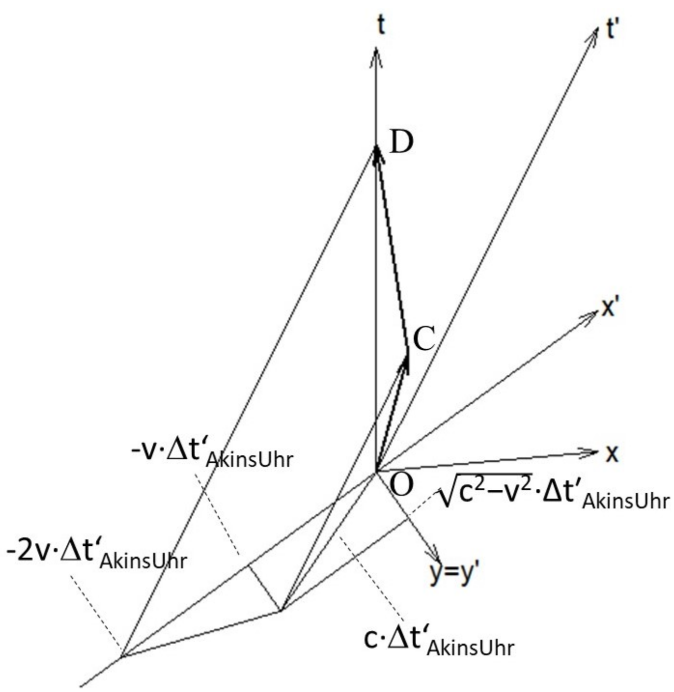


Bild 5 zur Lichtuhr

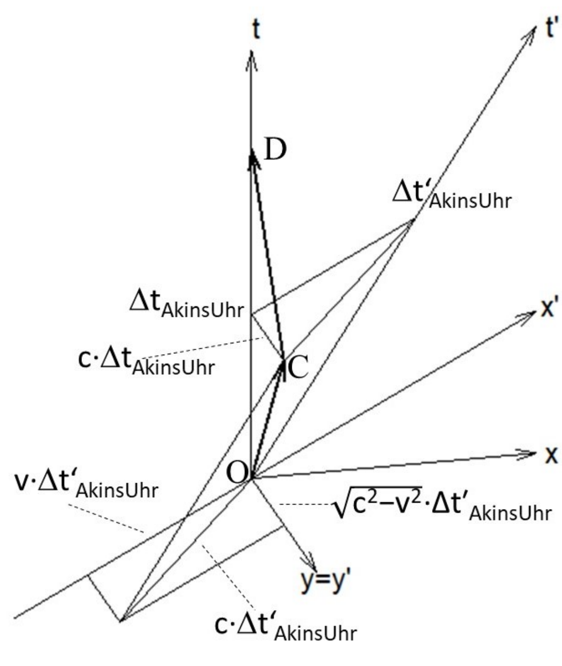


Bild 6 zur Lichtuhr

Wir projizieren die Punkte C und D parallel zur t'-Achse auf die $x'y'$-Ebene [Bild 5]. Hier sind die Projektionslinien mitgezeichnet, der besseren Übersicht halber aber außer für x' die negativen Achsen nicht. Akin hat für Beata die Geschwindigkeit $-v$ entlang der x'-Achse. Für das Licht in seiner Uhr bleibt in y'-Richtung nur die Geschwindigkeitskomponente $\sqrt{c^2 - v^2}$ übrig. In $y = y'$-Richtung legt das Licht in beiden Systemen vom Start bis zum oberen Spiegel die gleiche Strecke zurück. Wir haben in der $x'y'$-Ebene das rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse $c \cdot \Delta t'_{AkinsUhr}$ und den Katheten $v \cdot \Delta t'_{AkinsUhr}$ und $\sqrt{c^2 - v^2} \cdot \Delta t'_{AkinsUhr}$. Eine Etage höher auf der Höhe $\Delta t'_{AkinsUhr}$ in Beatas System das gleiche Dreieck, wobei die letzte Kathete dort $c \cdot \Delta t_{AkinsUhr}$ ist. Man kann den Pythagoras aufstellen oder gleich die beiden Ausdrücke für die Kathete gleichsetzen. Hier die Rechnung analog zu der von Seite 14:

$$(v \cdot \Delta t'_{AkinsUhr})^2 + (c \cdot \Delta t_{AkinsUhr})^2 = (c \cdot \Delta t'_{AkinsUhr})^2 \qquad \Rightarrow$$

$$c^2 \cdot (\Delta t_{AkinsUhr})^2 = c^2 \cdot (\Delta t'_{AkinsUhr})^2 - v^2 \cdot (\Delta t'_{AkinsUhr})^2 \quad \Rightarrow$$

$$c \cdot \Delta t_{AkinsUhr} = \sqrt{c^2 - v^2} \cdot \Delta t'_{AkinsUhr} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t_{AkinsUhr} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \cdot \Delta t'_{AkinsUhr}$$

Ja, Beata sieht Akins Uhr langsamer ticken als er selbst seine eigene Uhr sieht. Genau wie Akin Beatas Uhr langsamer ticken sieht als sie ihre Uhr selber. Bild 7 stellt die Lichtwege in beiden Uhren mit jeweils der Zeit vom Start bis zur ersten Reflexion in beiden Systemen gemessen zusammen. Mit den richtigen Projektionen auf die Achsen ist es kein Widerspruch mehr, dass jeder der Meinung ist, die Uhr des anderen gehe langsamer als die eigene.

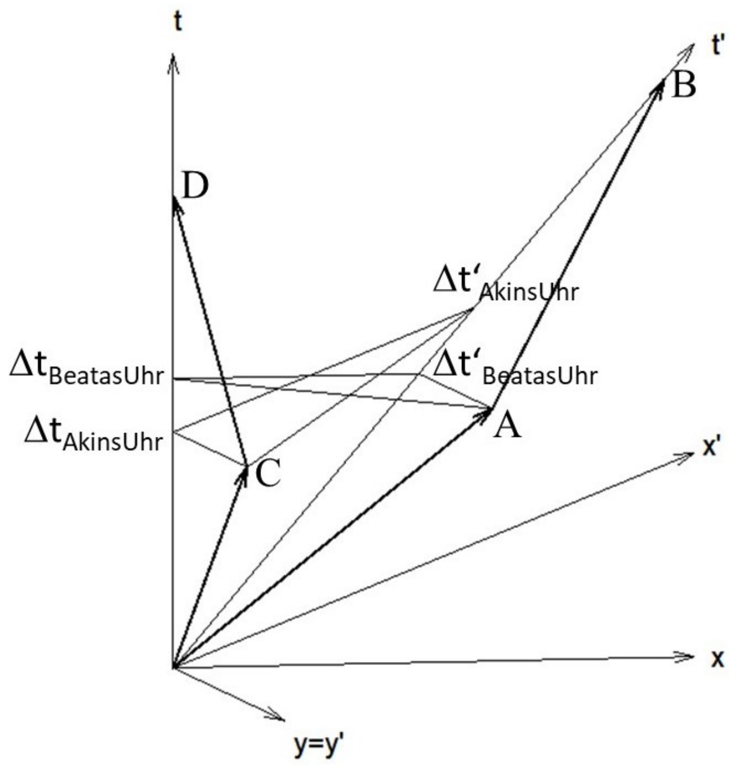


Bild 7 zur Lichtuhr

Ein weiteres Gedankenexperiment ist das Garagenparadoxon, von dem es im Internet ein nettes Video als Hangarparadoxon gibt (*youtube.com/watch?v=C73UrWiJ530*, Stand August 2023). Ein Raumschiff von 1000 m Länge fliegt mit 60% der Lichtgeschwindigkeit durch einen 900 m langen Hangar. In dem Moment, in dem sich das Raumschiff in der Mitte des Hangars befindet, schließt der Hangarbetreiber beide Tore und öffnet sie sofort wieder. Nach der klassischen Physik würde das nicht passen, aber das ist noch nicht das Paradoxon, denn in der Relativitätstheorie gibt es die Längenkontraktion. Der Hangarbetreiber sieht das Raumschiff auf 800 m verkürzt, so dass es problemlos in den Hangar passt [Bild 1]. Für den Raumschiffpiloten bleibt sein Raumschiff 1000 m lang und er sieht den Hangar auf 720 m verkürzt. Beim Schließen der Tore würden vorne und hinten je 140 m Raumschiff abgetrennt [Bild 2]. Das Paradoxon besteht darin, dass nicht beides sein kann: Das Raumschiff passt in den Hangar oder nicht.

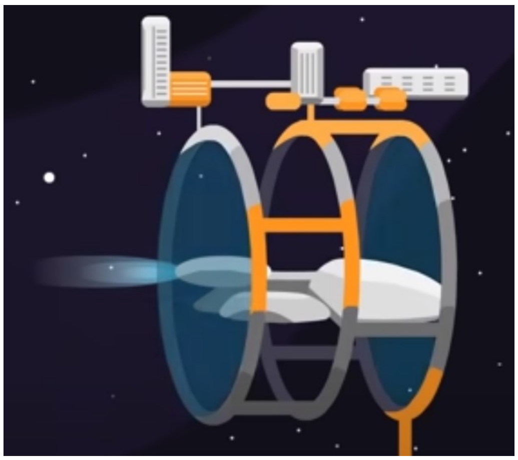


Bild 1 zum Hangarparadoxon

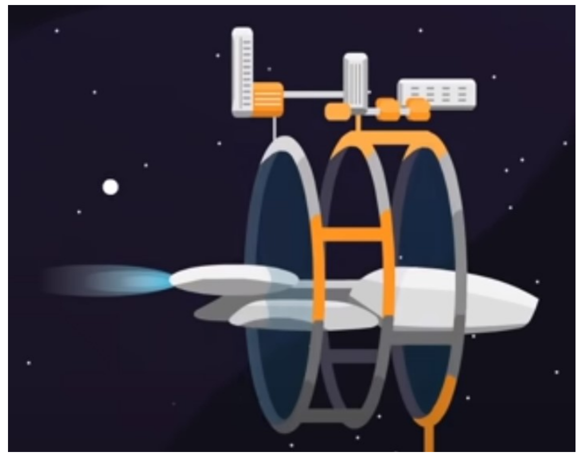


Bild 2 zum Hangarparadoxon

Die Auflösung besteht darin, dass sich zwar für den Hangarbetreiber die Tore gleichzeitig schließen, für den Raumschiffpiloten jedoch nicht (das war der voreilige Irrtum). Für den Pilotin schließt sich das vordere Tor, als der Bug seines Raumschiffs diese Position noch gar nicht erreicht hat [Bild 3]. Da es sich sofort wieder öffnet, kann das Raumschiff unbeschadet weiterfliegen. Das hintere Tor schließt sich erst, als das Heck des Raumschiffs diese Position schon passiert hat [Bild 4], und beschädigt das Raumschiff ebenfalls nicht.

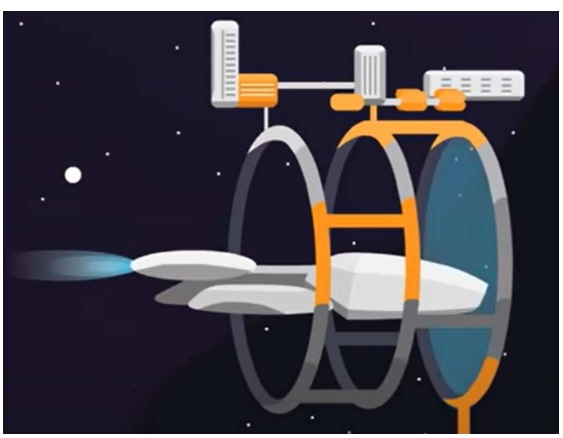


Bild 3 zum Hangarparadoxon

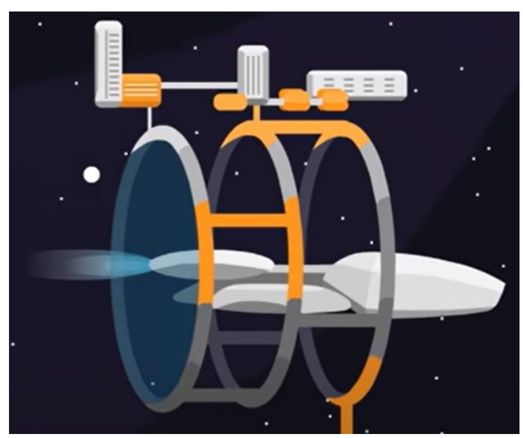
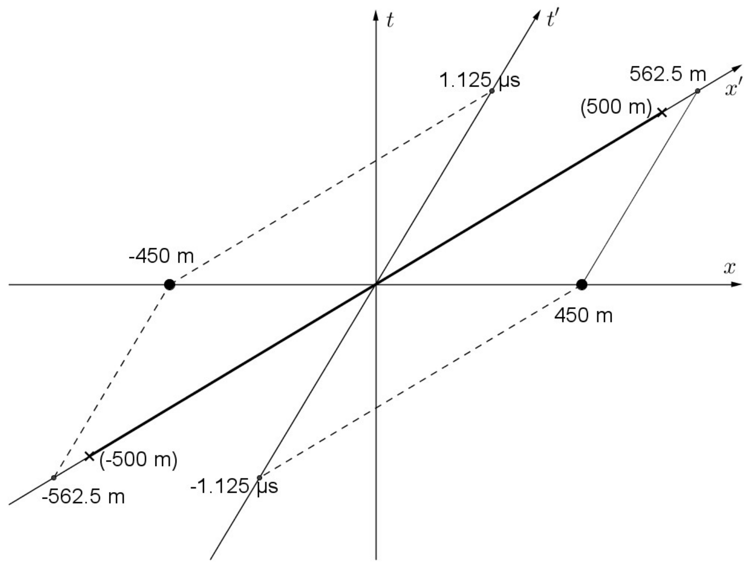


Bild 4 zum Hangarparadoxon

Das Paradoxon und seine Auflösung sind im Video mit einer Animation gut erklärt (siehe die dem Video entnommenen Bilder). Ein Minkowski-Diagramm und Lorentztransformationen werden im Video nur kurz eingeblendet. Wie bei allen Beispielen, soll auch zum Hangarparadoxon hier diese strenge trockene Theorie gegeben werden.

Der Hangar sei das ungestrichene System, das Raumschiff das gestrichene. Wir legen den Nullpunkt in die Mitte des Hangars und zur Zeit $t = 0$ schließt der Betreiber die beiden Tore für einen Moment (Ereignisse •). Durch Projektion bzw. Lorentztransformation werden die Koordinaten dieser Ereignisse im Raumschiff-System ermittelt. Wir landen bei $x' = \pm 562.5\,\mathrm{m}$. In dieser Darstellung im Minkowski-Diagramm passt das Raumschiff sogar dazwischen, denn in seinem eigenen System bleibt es stationär zwischen -500 m und 500 m. Die Torschließungen sind im Raumschiffsystem jedoch nicht gleichzeitig. Wir setzen den Zeitnullpunkt der Raumschiffzeit so, dass er mit dem Zeitnullpunkt der Hangarzeit zusammenfällt. Dann schließt für den Raumschiffpiloten das vordere Tor bei $-1.125\,\mu\mathrm{s}$ und das hintere bei $1.125\,\mu\mathrm{s}$. Nach den Lorentztransformationen $x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ und $t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}\cdot x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ hier die Rechnungen für das vordere Tor:



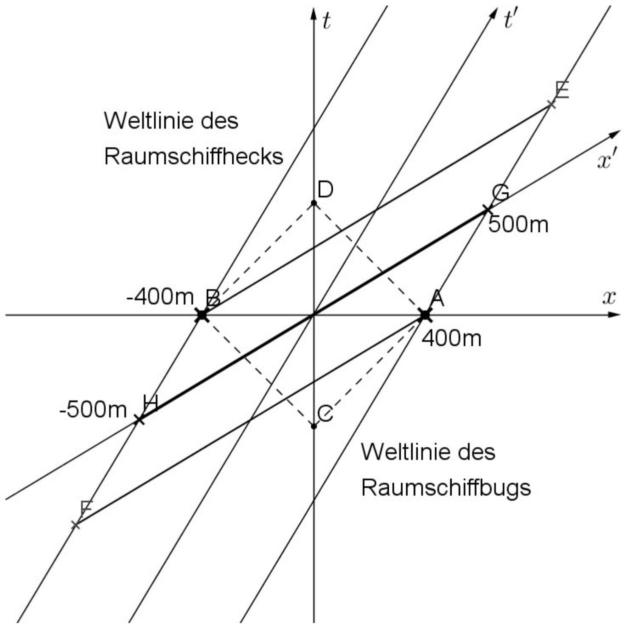
Die Tore schließen gleichzeitig im Hangarsystem und nacheinander im Raumschiffsystem.

$$x' = \frac{450\,\mathrm{m} - 0.6c\cdot 0\,\mathrm{s}}{\sqrt{1-0.6^2}} = 562.5\,\mathrm{m} \qquad \text{und} \qquad t' = \frac{0\,\mathrm{s} - \frac{0.6\cdot 3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{(3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2}\cdot 450\,\mathrm{m}}{\sqrt{1-0.6^2}} = -1.125\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$$

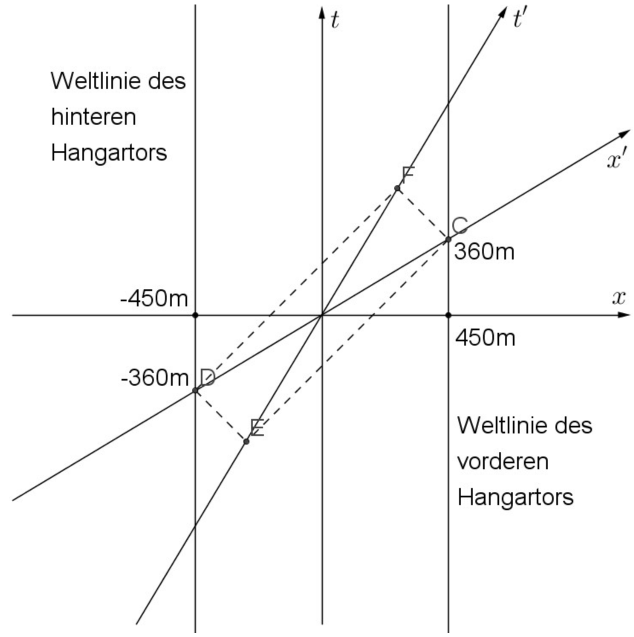
Die Werte für das hintere Tor ergeben sich analog.

Aber wo sieht man im Minkowski-Diagramm die Verkürzung des Raumschiffs auf 800 m für den Hangarbetreiber und die Verkürzung des Hangars auf 720 m für den Raumschiffpiloten? Dazu erstelle ich noch zwei weitere Diagramme, wie der Hangarbetreiber die Länge des Raumschiffs und der Raumschiffpilot die Hangarlänge misst. Dazu müssen sie Lichtsignale verwenden. Wir nehmen an, dass sowohl Bug und Heck des Raumschiffs als auch die Hangartore mit reflektierenden Spiegeln ausgestattet sind.

Im linken Diagramm oben auf der nächsten Seite sendet der Hangarbetreiber im Punkt C Lichtsignale nach beiden Richtungen aus. Das nach vorn ausgesendete Signal wird in A am Bug des Raumschiffs reflektiert, wenn es diesen eingeholt hat. Das nach hinten ausgesendete Signal wird in B am Heck des Raumschiffs reflektiert, wenn es mit diesem zusammentrifft. In D laufen die reflektierten Signale wieder beim Hangarbetreiber zusammen und aus der Lichtlaufzeit schließt er auf die Länge des Raumschiffs. Er muss natürlich wissen, dass er nach seiner Uhr das Signal in C bei $t = -400\,\mathrm{m}/(3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}) = -1.33\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$ losschicken muss, um es in D bei $t = 1.33\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$ wieder zu empfangen. Warum klappt das? A liegt auf der x-Achse bei 400 m. Das entspricht $400\,\mathrm{m}/\sqrt{1-0.6^2} = 500\,\mathrm{m}$ auf der x'-Achse wie in G. Während der Reflexion in A erstreckt sich das Raumschiff allerdings nicht zwischen H und G, sondern zwischen F und A. Im ungestrichenen System erfolgt die Reflexion am Bug bei $t = 0$, im gestrichenen System bei $t' = -1\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$. Die Lichtaussendung bei C wäre im gestrichenen System übrigens bei $t' = -1.67\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$. Analoge Überlegungen gelten für die Reflexion am Heck, während der sich das Raumschiff zwischen B und E befindet. Der Hangarbetreiber sieht das Raumschiff zwischen -400 m und 400 m, also 800 m lang.



Weltlinien des Raumschiffbugs und -hecks und Lichtsignale des Hangarbetreibers

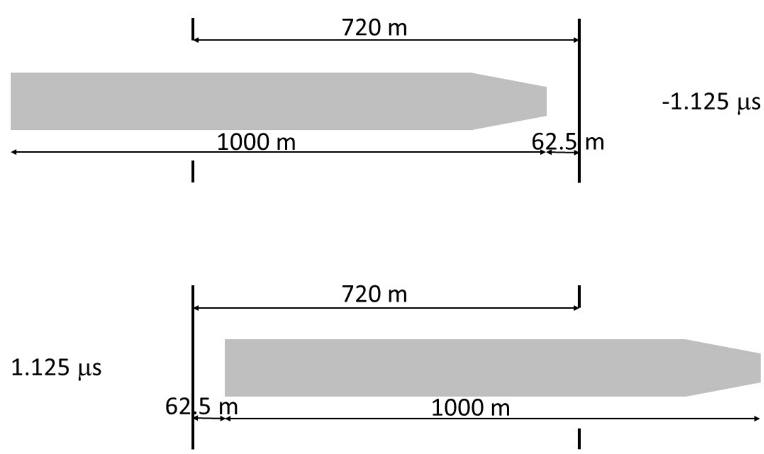


Weltlinien des vorderen und hinteren Hangartors und Lichtsignale des Raumschiffpiloten

Im rechten Diagramm sendet der Raumschiffpilot, der sich in der Mitte seines Raumschiffs befindet, in E Lichtsignale nach vorn und hinten aus. In C wird das nach vorn ausgesendete Signal am vorderen Hangartor reflektiert, in D wird das nach hinten ausgesendete Signal am hinteren Hangartor reflektiert. In F empfängt der Pilot die Signal wieder und schließt aus der Lichtlaufzeit auf die Hangarlänge. Die Verbindungslinie DC muss die Richtung der x'-Achse haben (siehe das Beispiel mit Akin und Beata zur Längenkontraktion), und da wir hier unser Szenario symmetrisch um den Nullpunkt gelegt haben, muss DC hier auf der x'-Achse liegen. C hat die x-Koordinate 450 m, das entspricht auf der x'-Achse $450\,\text{m} \cdot \sqrt{1-0.6^2} = 360\,\text{m}$. Die Reflexion am vorderen und hinteren Hangartor erfolgt für den Raumschiffpiloten gleichzeitig bei $t' = 0$. Er muss seine Signale natürlich genau bei $t' = -1.2\,\mu\text{s}$ ausgesendet haben, um sie bei $t' = 1.2\,\mu\text{s}$ zusammen wieder zu empfangen. Im ungestrichenen System wäre die Reflexion am vorderen Tor bei $t = 0.9\,\mu\text{s}$, die Reflexion am hinteren Tor bei $t = -0.9\,\mu\text{s}$ und das Signal wäre bei $t = -1.5\,\mu\text{s}$ ausgesendet worden. Das ist dem Raumschiffpiloten aber egal.

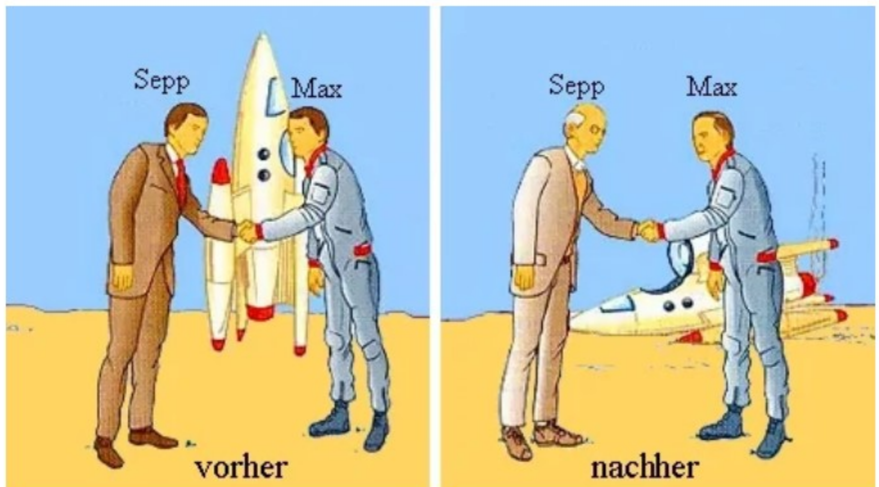
Er sieht den Hangar zwischen -360 m und 360 m, also 720 m lang.

Hier rechts noch eine Darstellung aus Sicht des Raumschiffpiloten mit Maßen. Wenn das vordere Tor zugeht, hat er zwischen Bug und Tor noch 62.5 m Platz. Ebenso zwischen Heck und Tor, wenn das hintere Tor zugeht.



Der Hangar und die Tore im Bezugssystem des Raumschiffs

Das berühmteste Paradoxon der Relativitätstheorie ist das Zwillingsparadoxon.
Es ist sehr bekannt, obwohl Schulbücher es oft höchstens in einem Satz erwähnen.
Big Bang 2 Physik Oberstufe von Martin Apolin (Klett 2019) widmet dem Zwillingsparadoxon immerhin einen Info-Kasten. Etwas mehr Diskussion findet man im älteren Buch *Dorn/Bader Physik Oberstufe Gesamtband 12/13 (Schroedel 1999)*. Die schönste bildliche Darstellung, auch mit einem kurzen Text und Zahlenbeispiel, findet sich bei *Leifi Physik (https://www.leifiphysik.de/relativitaetstheorie/spezielle-relativitaetstheorie/ausblick/zwillingsparadoxon, Stand August 2023)*, daher sei dies als "Schulbuchgrundlage" hier wiedergegeben:



©
Abb. 1 Zwillinge vor und nach der Reise

Von allen Paradoxa der Relativitätstheorie ist das sogenannte **Uhren- oder Zwillingsparadoxon** das berühmteste. Es handelt sich dabei um ein Gedankenexperiment, das bereits von Einstein (1911) formuliert wurde.

Aufgrund der Zeitdilatation, d.h. der Aussage "bewegte Uhren gehen langsamer", wird behauptet: Verbleibt von zwei gleichartigen Uhren eine in einem Inertialsystem in Ruhe, während man die zweite auf eine Reise mitnimmt und an deren Ende schließlich wieder an den Ort der ersten zurückbringt, so wird die zweite Uhr gegenüber der ersten nachgehen. In der Zwillingsversion desselben Gedankenversuchs bedeutet das: Geht einer von zwei Zwillingen auf eine "Raumfahrt", so ist er nach seiner Rückkehr zur Erde jünger als sein zu Hause gebliebener Zwillingsbruder (vgl. **Abb. 1**).

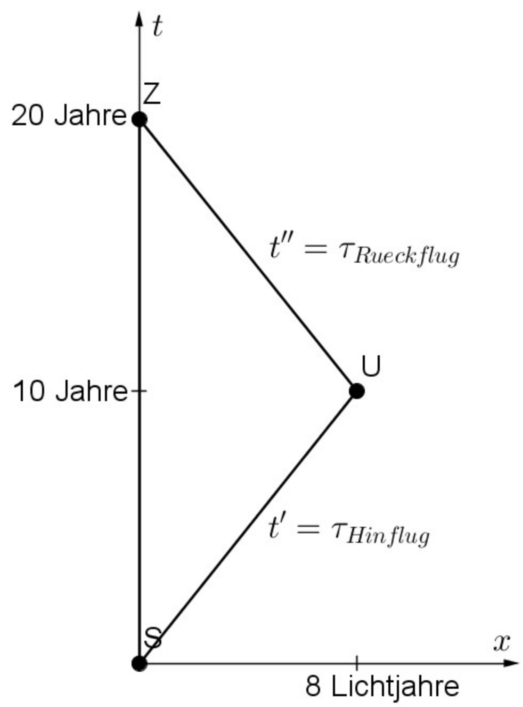
Ein Zahlenbeispiel

Zur Veranschaulichung betrachten wir ein einfaches Zahlenbeispiel, :
An einem Neujahrstag verlässt Astronaut Max seinen Zwillingsbruder Sepp in einem Raumschiff, das mit $v = 0{,}8 \cdot c$ fährt. Nach zehn Jahren, gemessen von der Erde aus, kehrt er um und fährt mit gleicher Geschwindigkeit zurück. Dort trifft er nach einer Gesamtreisezeit von zwanzig Jahren (Erdzeit) wieder ein.
Für die Borduhren hat die Hinreise wegen der Zeitdilatation jedoch nur

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\cdot 10\,\text{Jahre} = \sqrt{1-(0,80)^2}\cdot 10\,\text{Jahre} = 6\,\text{Jahre}$$

gedauert, ebenso wie die Rückreise (Der Effekt der Zeitdilatation ist von der Bewegungsrichtung unabhängig; die hergeleiteten Formeln gelten ebenso für eine negative Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$). Max war also insgesamt nur 12 Jahre nach Bordzeit unterwegs. Nach der Rückkehr ist Max um 8 Jahre jünger als Sepp.

In dem wiedergegebenen Textausschnitt wird noch nicht klar, worin eigentlich das Paradoxon besteht. Wir wissen, dass die Aussage “Bewegte Uhren gehen langsamer” aus jeder Perspektive gilt. Für Max sieht es so aus, als ob sich Sepp mit der Erde zunächst von ihm entfernt und dann wieder auf ihn zukommt. Für Max ist Sepp in Bewegung und müsste beim Wiedersehen jünger sein als er. Es kann beim Ereignis des Wiedersehens jedoch nur einer der jüngere sein. Der Raumfahrer Max ist beim Wiedersehen der jüngere und das ist kein Widerspruch in der Relativitätstheorie. Da es ein Wiedersehen geben muss, können nicht beide Brüder die ganze Zeit in ihrem einen Inertialsystem bleiben. Einer muss umkehren und damit das Inertialsystem wechseln. Derjenige, der umkehrt, wird am Ende der jüngere sein. (Siehe dazu Dorn/Bader und meinen älteren Artikel “Das Zwillingsparadoxon mit Tangens von ein paar Winkeln aufgeklärt” unter Astronomie). Man könnte außer Effekten der Beschleunigung beim Umkehren noch vermuten, dass das Ergebnis, wer am Ende der jüngere ist, noch davon abhängt, welches Bezugssystem man ursprünglich als Ruhesystem auswählt oder ob der Hinflug und Rückflug des Raumfahrers mit gleicher oder unterschiedlicher Geschwindigkeit geschehen. Tut es nicht. Im Folgenen hier wird nur der “symmetrische” Fall diskutiert, dass Max mit der gleichen Geschwindigkeit wegfliegt und zurückkommt, sowie dass es keine Alterszugabe für Beschleunigungen beim Umkehren gibt.



Weltlinien nur im System der Erde

Mein erstes Diagramm zeigt die Weltlinien der Zwillinge am einfachsten im Bezugssystem von Sepp auf der Erde. t bezeichne auch die Zeit für den Hinflug von Max. Der Rückflug dauert auch t und die gesamte Reise $2t$. Der Umkehrpunkt am weitesten von der Erde entfernt hat die Ortskoordinate x. Mit dem Zahlenbeispiel von der LeifiPhysik-Seite haben wir: $v = 0.8 \cdot c = 0.8 \cdot 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} = 2.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$, $t = 10\,\mathrm{Jahre} = 10 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 315360000\,\mathrm{s}$ und $x = 2.4 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot 315360000\,\mathrm{s} = 7.57 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m} = 8\,\mathrm{Lichtjahre}$. Es macht die Skalierung in diesem Beispiel handlich, Entfernungen in Lichtjahren anzugeben mit $1\,\mathrm{Lichtjahr} = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s} = 9.46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$. Der Startpunkt S liegt bei $x = 0$, $t = 0$, der Umkehrpunkt U des Raumfahrers bei $x = 8$ Lichtjahre, $t = 10$ Jahre und der Zielpunkt Z des Wiedersehens bei $x = 0$, $2t = 20$ Jahre.

Für die Hinflugweltlinie von S nach U haben wir die Eigenzeit

$$t' = \tau_{Hinflug} = \sqrt{(10\,\mathrm{Jahre})^2 - (8\,\mathrm{Lichtjahre}/c)^2} = 6\,\mathrm{Jahre}$$

Für die Rückflugweltlinie von U nach Z haben wir die Eigenzeit

$$t'' = \tau_{Rueckflug} = \sqrt{(20\,\mathrm{Jahre} - 10\,\mathrm{Jahre})^2 - (-8\,\mathrm{Lichtjahre}/c)^2} = 6\,\mathrm{Jahre}$$

Mit den Eigenzeiten ist eigentlich alles klar - und jegliche Skalierung gestrichener Zeitachsen im Minkowski-Diagrammen ist im Grunde Berechnung der Eigenzeit. Max altert 12 Jahre, während Sepp 20 Jahre altert, so dass Max beim Wiedersehen 8 Jahre jünger ist als Sepp.

Weitere Überlegungen und Rechnungen: Da Max die Richtung ändern muss, brauchen wir insgesamt drei Inertialsysteme. Zunächst legen wir alle mit ihrem Nullpunkt in den Startpunkt S (darauf kommt es letztlich nicht an). Die Bezeichnungen t, t' und t'' werden ab jetzt wieder allgemein für Zeiten in den entsprechenden Systemen gebraucht. Für Sepp auf der Erde im ungestrichenen System ist sein Zeitpunkt 10 Jahre gleichzeitig mit dem Umkehren U von Max, für Max bei 6 Jahren.

Welcher Punkt auf Sepps Weltlinie ist für Max im gestrichenen System gleichzeitig mit seinem Umkehrpunkt U? Nach $t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ ist das der Punkt mit $6\,\text{Jahre} = \dfrac{t - \frac{v}{c^2} \cdot 0\,\text{m}}{\sqrt{1-0.8^2}}$, also $t = 6\,\text{Jahre} \cdot \sqrt{1-0.8^2} = 3.6\,\text{Jahre}$. Der Zielpunkt Z ($x = 0$, $t = 20\,\text{Jahre}$) hat im gestrichenen System die Koordinaten $x' = \dfrac{x - v \cdot t}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \dfrac{0\,\text{m} - 0.8 \cdot c \cdot 20\,\text{Jahre}}{\sqrt{1-0.8^2}} = -26.7\,\text{Lichtjahre}$ und

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{20\,\text{Jahre} - \frac{v}{c^2} \cdot 0\,\text{m}}{\sqrt{1-0.8^2}} = 33.3\,\text{Jahre}.$$

Das doppelt gestrichene System und das gestrichene System haben einen Geschwindigkeitsunterschied, der größer als die Lichtgeschwindigkeit ist $(2 \cdot 0.8 \cdot c)$[1]. Um Koordinaten von Punkten ins doppelt gestrichene System umzurechnen, gehe ich deshalb von den Koordinaten im ungestrichenen System aus. Der Punkt U hat im doppelt gestrichenen System die Koordinaten

$$x'' = \frac{x - (-v) \cdot t}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{8\,\text{Lichtjahre} + 0.8 \cdot c \cdot 10\,\text{Jahre}}{\sqrt{1-0.8^2}} = 26.7\,\text{Lichtjahre} \quad \text{und}$$

$$t'' = \frac{t - \frac{(-v)}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{10\,\text{Jahre} + \frac{0.8c}{c^2} \cdot 8\,\text{Lichtjahre}}{\sqrt{1-0.8^2}} = 27.3\,\text{Lichtjahre}.$$

Der Punkt Z hat im doppelt gestrichenen System die Koordinaten

$$x'' = \frac{x - (-v) \cdot t}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{0\,\text{m} + 0.8 \cdot c \cdot 20\,\text{Jahre}}{\sqrt{1-0.8^2}} = 26.7\,\text{Lichtjahre}$$

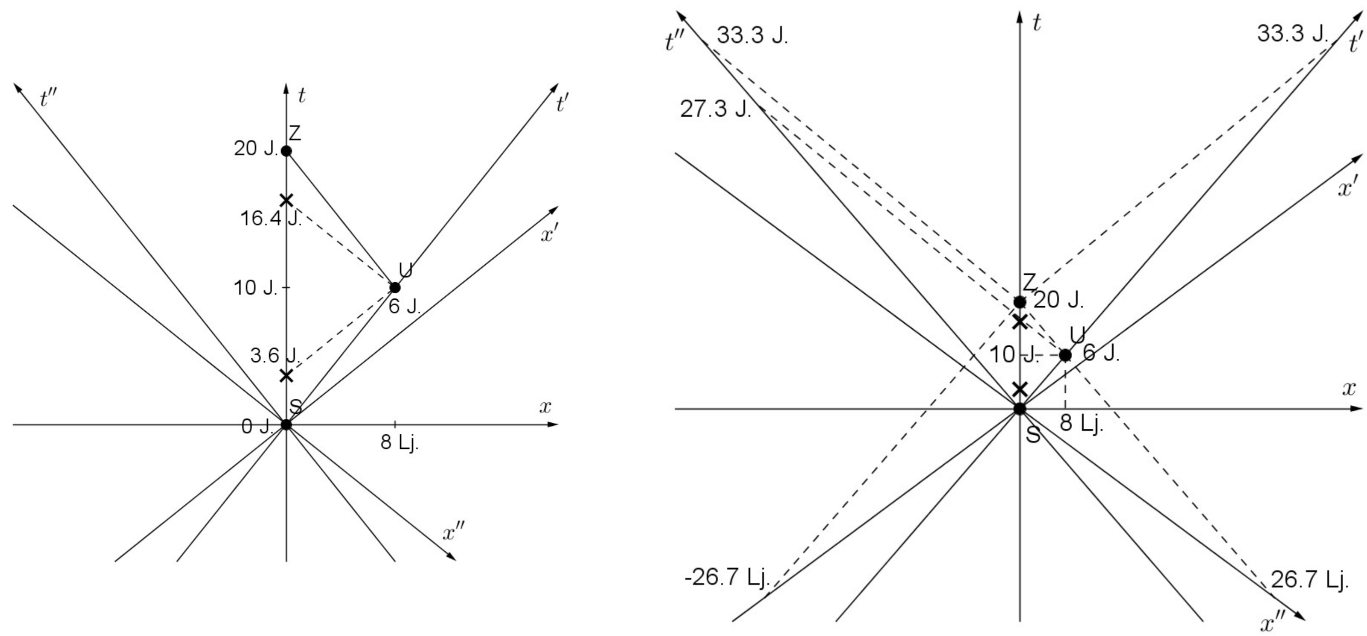
(im doppelt gestrichenen System bewegt sich Max während des Rückflugs von U nach Z nicht)

und $t'' = \dfrac{t - \frac{(-v)}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \dfrac{20\,\text{Jahre} + \frac{v}{c^2} \cdot 0\,\text{m}}{\sqrt{1-0.8^2}} = 33.3\,\text{Jahre}.$ Max Rückflug dauert in seinem Inertialsystem vom Zeitpunkt 27.3 Jahre bis zum Zeitpunkt 33.3 Jahre, also 6 Jahre.
Welcher Punkt von Sepps Weltlinie ist im doppelt gestrichenen System gleichzeitig zum Umkehrpunkt U? Nach $t'' = \dfrac{t - \frac{(-v)}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1-(-v/c)^2}}$ ist das der Punkt mit $27.3\,\text{Jahre} = \dfrac{t - \frac{(-v)}{c^2} \cdot 0\,\text{m}}{\sqrt{1-0.8^2}}$,

also $t = 27.3\,\text{Jahre} \cdot \sqrt{1-0.8^2} = 16.4\,\text{Jahre}$. Es mutet merkwürdig an, dass Max beim Umkehren so einen großen Sprung in der Gleichzeitigkeit mit Punkten auf Sepps Weltlinie macht. Jedoch zeigt diese Rechnung, wie die Aussage "Bewegte Uhren gehen langsamer" aus jeder Perspektive gewahrt bleibt. In Sepps ungestrichenem System sind während des Hinflugs 10 Jahre vergangen; Max Eigenzeit sind nur 6 Jahre. Bis zum Punkt, der im gestrichenen System gleichzeitig zum Umkehrpunkt auf Sepps Weltlinie ist, ist für ihn nur die Eigenzeit 3.6 Jahre vergangen. Wie

[1] OK, relativistisch richtig verrechet natürlich nicht: Die resultierende Geschwindigkeit aus zweimal $0.8c$ ist $(0.8c + 0.8c)/(1 + 0.8^2) = 0.976c$. Aber über das ungestrichene System zu gehen, ist einfacher.

10 Jahre $\cdot \sqrt{1-0.8^2} = 6$ Jahre ergibt, ergibt 6 Jahre $\cdot \sqrt{1-0.8^2} = 3.6$ Jahre. Für den Rückflug gilt das mit dem Zeitraum zwischen 16.4 Jahren und 20 Jahren auf Sepps Weltlinie genauso.



Zu den Rechnungen auf der vorherigen Seite: drei Inertialsysteme mit Nullpunkt im Start, gleichzeitige Punkte und Punktkoordinaten. (Die Projektionen von U und Z auf die gestrichenen Achsen liegen so weit draußen, dass wir rauszoomen müssen.)

Ein symmetrischeres Bild und einen kleinen Hinweis, was es mit dem Gleichzeitigkeitssprung auf sich haben könnte, gibt das Minkowski-Diagramm mit dem Nullpunkt der drei Inertialsysteme in Max Umkehrpunkt:

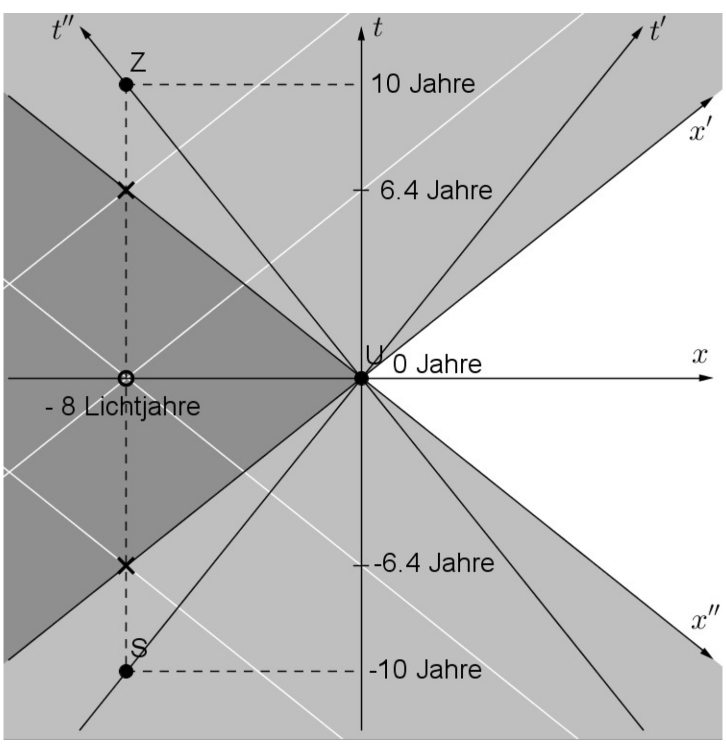
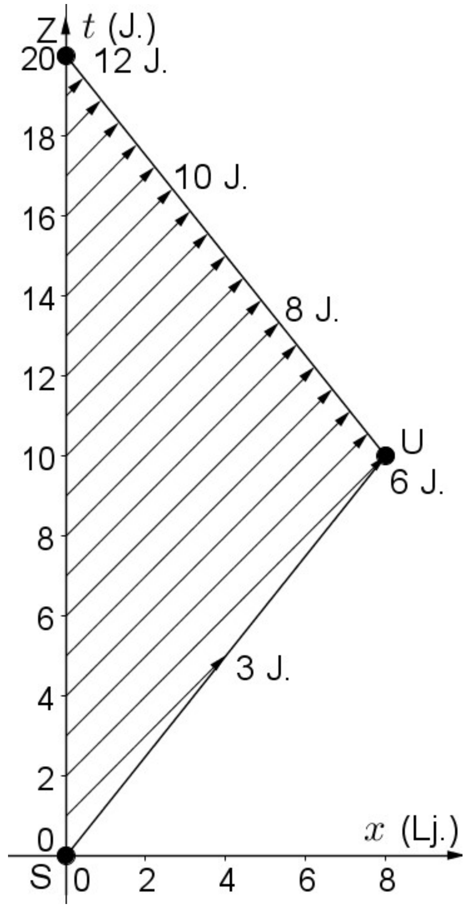


Diagramm zum Zwillingsparadoxon mit dem Nullpunkt aller drei Inertialsysteme in Max Umkehrpunkt.

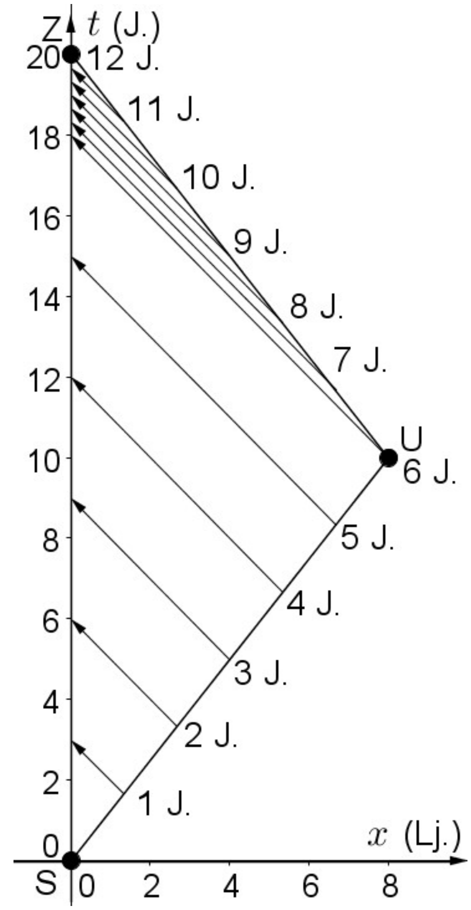
Dann liegen Start- und Zielpunkt im ungestrichenen System bei
S(x=−8 Lichtjahre, t=−10 Jahre),
Z(x=−8 Lichtjahre, t=10 Jahre).
Im gestrichenen System haben wir
S(x'=0, t'=−6 Jahre),
Z(x'=−26.7 Lichtjahre,t'=27.3 Jahre).
Im doppelt gestrichenen System
S(x''=−26.7 Lichtjahre,t''=−27.3 Jahre),
Z(x''=0, t''=6 Jahre).

Interessanter ist, was mit dem Stück zwischen -6.4 Jahren und 6.4 Jahren auf Sepps Weltlinie (zwischen den Kreuzen auf der senkrechten Linie bei -8 Lichtjahren) passiert, wenn man es parallel zur x'-Achse auf die t'-Achse bzw. parallel zur x''-Achse auf die t''-Achse projiziert. Im gestrichenen System kommen diese Zeiten nach U zu liegen, im doppelt gestrichenen jedoch vor U. (Die gefärbten Bereiche und die weißen Linien sollen helfen, die Parallelprojektion zu sehen.)

Häufig werden beim Zwillingsparadoxon noch Botschaften (Lichtsignale) eingeführt, die die Brüder einander schicken. Die Zeitintervalle, in denen sie empfangen werden, unterscheiden sich von denen, in denen sie losgeschickt wurden. Um diese Zeitintervalle abzulesen, muss man jedoch die Eigenzeiten und somit den Altersunterschied beim Wiedersehen schon kennen. Auch erklären die Intervalle nicht die verschieden großen Skalierungen an ungestrichenen und gestrichenen Achsen im Minkowski-Diagramm. Wenn man aber die Skalierungen und die Eigenzeiten hat, ist die Schar von Signalen *das* Bild, um den relativistischen Dopplereffekt herzuleiten. Das möchte ich im Folgenden (für Lichtwellen) mithilfe von etwas Trigonometrie zeigen. Das Zwillingsparadoxon enthält netterweise beide Fälle, nämlich dass sich Sender und Empfänger voneinander entfernen bzw. dass sich Sender und Empfänger aufeinander zu bewegen. Relativistisch spielt es logischerweise auch keine Rolle, ob sich der Sender oder der Empfänger bewegt; es kommt nur auf die Relativbewegung an[2].



Sepp sendet Signale.



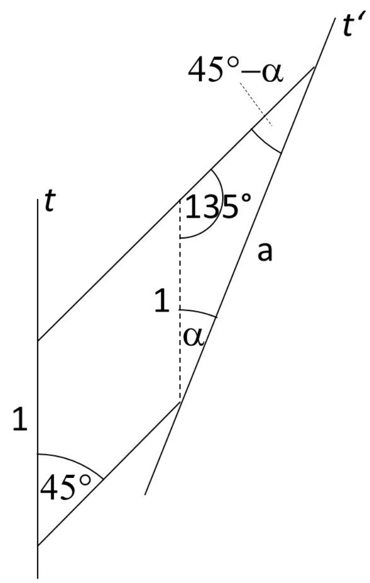
Max sendet Signale.

Hier zunächst die übliche Darstellung der gesendeten Signale. Im linken Diagramm sendet Sepp von der Erde jedes Jahr ein Signal, also 19 Signale; in S und Z muss er nichts senden, da steht Max ja direkt bei ihm. Max empfängt während seiner Reise auch 19 Signale, wenn auch nur 2 während seines Hinflugs (wenn wir U zum Hinflug zählen) und 17 während seines Rückflugs. Während Sepp immer im Abstand von einem Jahr sendet, empfängt Max die ersten beiden Signale auf seinem Hinflug in einem Abstand von 3 Jahren, dafür aber die restlichen auf dem Rückflug in Abständen von 1/3 Jahr. Im rechten Diagramm sendet Max ebenfalls Botschaften

[2]Wenn man sich im Klaren ist, wann man wie mit dem Motto "Bewegte Uhren gehen langsamer" das Bezugssystem, also die Skalierung, wechseln muss, bietet *Dorn/Bader Physik Oberstufe Gesamtband 12/13 (s.o)* allerdings eine akzeptable Herleitung der relativistischen Formel aus der nicht-relativistischen mit Unterscheidung von bewegtem Sender und Empfänger (siehe hier S.28).

im Abstand von einem Jahr, also 11 Signale (S und Z nicht mitgezählt). Sepp empfängt auch 11 Signale. Sogar die Empfangsintervalle sind gleich lang wie bei Max. Allerdings empfängt Sepp 6 Signale in Abständen von 3 Jahren (wenn wir das Signal von U hier dazuzählen) und 5 Signale in Abständen von 1/3 Jahr. Der Empfangsabstand wechselt, wenn Max an seinem Signalende vom Hinflug zum Rückflug umdreht (sei er Empfänger oder Sender).

Mich interessiert jedoch nicht so sehr der Wechsel, sondern die einzelnen Empfangsabstände. Sowohl das Aussenden als auch das Empfangen aufeinanderfolgender Signale entspricht einer Frequenz. Sehen wir die gezeichneten Signale als aufeinanderfolgende Wellenberge einer kontinuierlich gesendeten Welle. Zwar hätte die gesendete Welle mit $(1\text{Jahr})^{-1}$ eine sehr kleine Frequenz, aber die Überlegung soll nur den Faktor zwischen Sende- und Empfangsfrequenz zutage fördern, und dieser Faktor gilt dann für elektromagnetische Wellen aller Frequenzen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle sollte die Lichtgeschwindigkeit c sein, da wir die 45°-Linien im Minkowski-Diagramm verwenden. (Auch hier wäre die folgende trigonometrische Überlegung verallgemeinerbar, so dass man den relativistischen Dopplereffekt auch für regelmäßig abgeschossene Teilchen oder Sonden errechnen könnte.) Ich benutze im Folgenden neben einem Additionstheorem und dem Sinussatz das Wissen über das Minkowski-Diagramm. dass die t'-Achse im Winkel α zur t-Achse geneigt ist und dass die Skalierung auf der t'-Achse um den Faktor $\sqrt{(c^2+v^2)/(c^2-v^2)} = \sqrt{(1+\tan^2(\alpha))/(1-\tan^2(\alpha))}$ größer ist als auf der t-Achse, wenn v mit $\tan(\alpha) = v/c$ die Geschwindigkeit des gestrichenen gegenüber dem ungestrichenen System ist.



Sepp sendet,
Max ist auf dem Hinflug

1.Fall: Sepp sendet und Max fliegt von ihm weg. Sepp sendet zwei Signale im Abstand von einem Jahr. Dieser Abstand sei in der Zeichnung z.B. durch einen Zentimeter auf der t-Achse wiedergegeben. Zunächst berechne ich, welche Länge (z.B. in cm) in der Zeichnung die Strecke a auf der t'-Achse zwischen den beiden Signalempfängen hat.

Nach dem Sinussatz muss gelten: $\dfrac{1}{\sin(45° - \alpha)} = \dfrac{a}{\sin(135°)}$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{\sin(135°)}{\sin(45°)\cos(\alpha) - \cos(45°)\sin(\alpha)}$$

$$= \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}\cdot\cos(\alpha) - 1/\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha) - \sin(\alpha)}$$

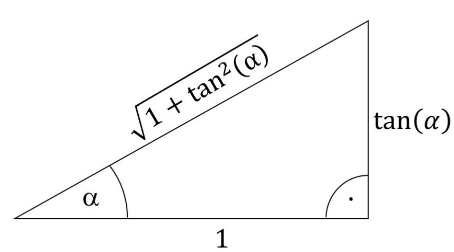
$$= \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{1}{1-\tan(\alpha)}$$

Das ist aber auf der t'-Achse um den Faktor $\sqrt{1-\tan^2(\alpha)}/\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}$ weniger Zeit "als die Länge in cm". Die Strecke a ist also im gestrichenen System die Zeit

$$\frac{\sqrt{1-\tan^2(\alpha)}}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{1}{1-\tan(\alpha)} = \frac{\sqrt{(1-\tan(\alpha))(1+\tan(\alpha))}}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} \cdot \sqrt{1+\tan^2(\alpha)} \cdot \frac{1}{1-\tan(\alpha)}$$

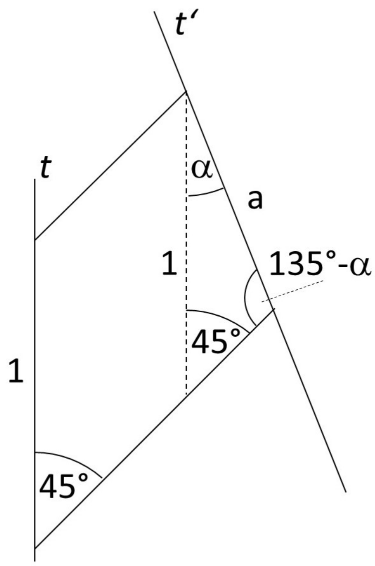
$$= \frac{\sqrt{1+\tan(\alpha)}}{\sqrt{1-\tan(\alpha)}} = \frac{\sqrt{1+v/c}}{\sqrt{1-v/c}}$$

Dabei wurde noch $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$ verwendet



sowie die dritte binomische Formel.

Man beachte, dass der Faktor zwischen dem Sende- und dem Empfangsintervall nicht einfach der Achsskalierungssfaktor ist. Letzterer enthält $\tan^2$, ersterer nur tan.
Mit den Zahlen aus dem Beispiel von Max und Sepp, sendet Sepp im Abstand von einem Jahr und Max empfängt im Abstand von $\sqrt{1+0.8}/\sqrt{1-0.8} = 3$ Jahren. Wir haben mit Zeitintervallen gerechnet. Für die Sendefreqenz f_S und die Empfangsfrequenz f_E gilt natürlich der reziproke Faktor. Mit $f_S = \dfrac{1}{\text{Jahr}}$ wird $f_E = \dfrac{\sqrt{1-v/c}}{\sqrt{1+v/c}} \cdot f_S = \dfrac{\sqrt{1-0.8}}{\sqrt{1+0.8}} \cdot \dfrac{1}{\text{Jahr}} = \dfrac{1}{3\,\text{Jahre}}$.



Sepp sendet,
Max ist auf dem Rückflug

2.Fall: Sepp sendet und Max fliegt auf ihn zu. Sepp sendet wiederum zwei Signale im Abstand von einem Jahr (z.B. 1cm auf seiner Zeitachse t). Wiederum wird zunächst geometrisch die Strecke a in der Zeichnung zwischen den Empfängen bei Max berechnet:

Im Dreieck hier sagt der Sinussatz: $\dfrac{1}{\sin(135° - \alpha)} = \dfrac{a}{\sin(45°)}$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{\sin(45°)}{\sin(135°)\cos(\alpha) - \cos(135°)\sin(\alpha)}$$

$$= \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}\cdot\cos(\alpha) - (-1/\sqrt{2})\cdot\sin(\alpha)}$$

$$= \frac{1}{\cos(\alpha)+\sin(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{1}{1+\tan(\alpha)}$$

Auch das ist auf der t'-Achse gegenüber der Zeichenlänge um den Faktor $\sqrt{1-\tan^2(\alpha)}/\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}$ weniger Zeit, also

$$\frac{\sqrt{1-\tan^2(\alpha)}}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{1}{1+\tan(\alpha)} = \frac{\sqrt{(1-\tan(\alpha))(1+\tan(\alpha))}}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} \cdot \sqrt{1+\tan^2(\alpha)} \cdot \frac{1}{1+\tan(\alpha)}$$

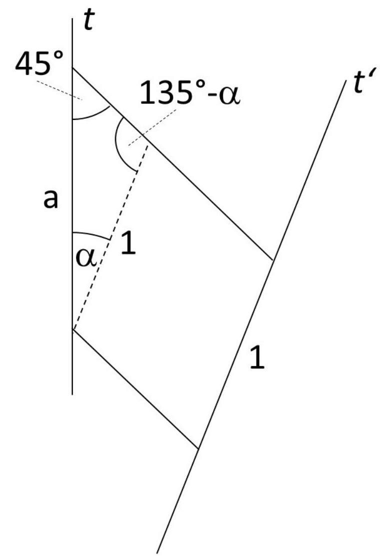
$= \dfrac{\sqrt{1-\tan(\alpha)}}{\sqrt{1+\tan(\alpha)}} = \dfrac{\sqrt{1-v/c}}{\sqrt{1+v/c}}$. Mit den Zahlen aus dem Beispiel sendet Sepp seine Signale immer noch im Abstand von einem Jahr, aber Max empfängt sie auf seinem Rückflug im Abstand von $\sqrt{1-0.8}/\sqrt{1+0.8} = 1/3\,\text{Jahr}$. Mit der Sendefrequenz $f_S = 1/\text{Jahr}$ beträgt bei Annäherung die Empfangsfrequenz jetzt $f_E = \dfrac{\sqrt{1+v/c}}{\sqrt{1-v/c}} \cdot f_S = \dfrac{\sqrt{1+0.8}}{\sqrt{1-0.8}} \cdot \dfrac{1}{\text{Jahr}} = \dfrac{3}{\text{Jahr}}$.

3.Fall: Jetzt sendet Max während seines Wegflugs Signale im Abstand von einem seiner Jahre und Sepp empfängt sie. Die 1 in der Zeichnung soll diesmal eine Zeiteinheit auf der t'-Achse bezeichnen (wenn eine Einheit auf der t-Achse 1cm misst, ist die Strecke für diese 1 auf der t'-Achse länger.) Rein geometrisch wird wieder die Strecke a im Dreieck berechnet.

Der Sinussatz besagt $\dfrac{1}{\sin(45°)} = \dfrac{a}{\sin(135° - \alpha)} \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{\sin(135°)\cos(\alpha) - \cos(135°)\sin(\alpha)}{\sin(45°)}$

$$= \frac{1/\sqrt{2}\cdot\cos(\alpha) - (-1/\sqrt{2})\cdot\sin(\alpha)}{1/\sqrt{2}} = \cos(\alpha) + \sin(\alpha) = \cos(\alpha)\cdot(1+\tan(\alpha))$$

Diesmal war ich von einer Zeiteinheit auf der t'-Achse ausgegangen, so dass die gleiche zeichnerische Länge auf der $t-$Achse um den Faktor $\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}/\sqrt{1-\tan^2(\alpha)}$ mehr Zeit bedeutet. Die Zeit zwischen den Empfängen der Signale im ungestrichenen System wird also



Max sendet auf seinem Hinflug

$$\frac{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}{\sqrt{1-\tan^2(\alpha)}}\cdot\cos(\alpha)\cdot(1+\tan(\alpha)) =$$

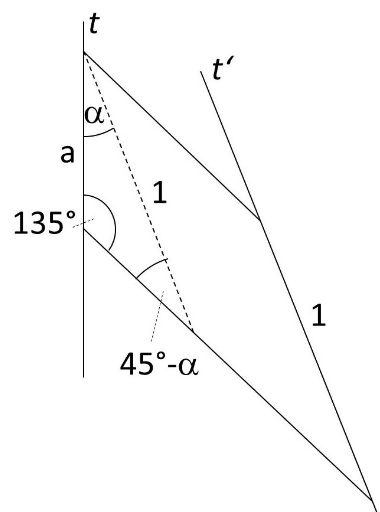
$$\frac{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}{\sqrt{(1-\tan(\alpha))(1+\tan(\alpha))}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}\cdot(1+\tan(\alpha)) =$$

$$\frac{\sqrt{1+\tan(\alpha)}}{\sqrt{1-\tan(\alpha)}} = \frac{\sqrt{1+v/c}}{\sqrt{1-v(c}}$$

Wenn Max also auf seinem Hinflug im Abstand von einem seiner Jahre Signale sendet, empfängt Sepp diese im Abstand von $\sqrt{1+0.8}/\sqrt{1-0.8} = 3$ Jahren in seiner Zeit auf der Erde.

Für die Frequenzen: $f_E = \frac{\sqrt{1-v/c}}{\sqrt{1+v/c}}\cdot f_S = \frac{\sqrt{1-0.8}}{\sqrt{1+0.8}}\cdot\frac{1}{\text{Jahr}} = \frac{1}{3\,\text{Jahre}}$

<u>4.Fall:</u> Im letzten Fall sendet Max Signale im Abstand von einem Jahr in seiner Raumschiffzeit, während er sich auf dem Rückflug der Erde annähert. Zum gezeichneten Dreieck lautet die Rechnung wie folgt. Der Sinussatz liefert



Max sendet auf seinem Rückflug

$$\frac{1}{\sin(135°)} = \frac{a}{\sin(45°-\alpha)} \quad\Rightarrow$$

$$a = \frac{\sin(45°)\cos(\alpha)-\cos(45°)\sin(\alpha)}{\sin(135°)}$$

$$= \frac{1/\sqrt{2}\cdot\cos(\alpha)-1/\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha)}{1/\sqrt{2}}$$

$$= \cos(\alpha)-\sin(\alpha) = \cos(\alpha)\cdot(1-\tan(\alpha))$$

Wiederum war ich von einer Zeiteinheit auf der t'-Achse ausgegangen, so dass eine entsprechende zeichnerische Länge auf der t-Achse um den Faktor $\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}/\sqrt{1-\tan^2(\alpha)}$ mehr ist, also

$$\frac{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}{\sqrt{1-\tan^2(\alpha)}}\cdot\cos(\alpha)\cdot(1-\tan(\alpha)) = \frac{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}{\sqrt{(1-\tan(\alpha))(1+\tan(\alpha))}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}\cdot(1-\tan(\alpha))$$

$$= \frac{\sqrt{1-\tan(\alpha)}}{\sqrt{1+\tan(\alpha)}} = \frac{\sqrt{1-v/c}}{\sqrt{1+v/c}}$$

Wenn Max auf seinem Rückflug Signale im Abstand von einem Jahr seiner Raumschiffzeit sendet, empfängt Sepp diese im Abstand von $\sqrt{1-0.8}/\sqrt{1+0.8} = 1/3$ Jahren der Erdenzeit.

Für die Frequenzen: $f_E = \frac{\sqrt{1+v/c}}{\sqrt{1-v/c}}\cdot f_S = \frac{\sqrt{1+0.8}}{\sqrt{1-0.8}}\cdot\frac{1}{\text{Jahr}} = \frac{3}{\text{Jahr}}$

Ich wollte hier zum besseren Verständnis die Weltlinien so belassen, dass Sepp auf der Erde das ungestrichene System mit der senkrechten Zeitachse hat und Max der Raumfahrer gestrichene schräge Zeitachsen. Das kann man im Minkowki-Diagramm problemlos umtauschen (siehe meinen früheren Aufsatz zum Zwillingsparadoxon unter Astronomie), so dass die Fälle 3 und 4 nicht separat hätten geometrisch aufgerollt werden müssen. Relativistisch kommt es nicht darauf an, wen von Sender und Empfänger wir als bewegt und wen als ruhend betrachten. Die Faktoren zwischen Sende- und Empfangsfrequenz hängen nur davon ab, ob sich Sender und Empfänger voneinander entfernen oder einander annähern. (Wenn man Annähern als negative Geschwindigkeit versteht, lassen sich sogar beide Fälle formal in derselben Formel ausdrücken.)

Hier die Argumentation aus *Dorn/Bader Physik Oberstufe Gesamtband 12/13 (Schroedel 1999)* zum relativistischen Dopplereffekt, die natürlich kürzer und eleganter ist:

4. Der Doppler-Effekt

Wir kennen den Effekt vom Schall (Band MS, Seite 273). Er tritt aber überall auf, wo Signale in zeitlicher Folge abgesandt werden und sich Signalquelle oder -empfänger bewegen, also auch bei Licht- und Radiowellen. Wenn wir den Effekt relativistisch behandeln, haben wir „auf Vorrat" auch den Fall hoher Relativgeschwindigkeit von Sender und Empfänger mit erfasst.

Beim Schall mussten wir unterscheiden, ob sich die Quelle oder der Empfänger relativ zum Schallträger bewegt. Für einen ruhenden Empfänger, der sich *vor* einer mit der Geschwindigkeit v auf ihn zukommenden Schallquelle befindet, erhielten wir die Frequenz $f_V = f/(1-\beta)$ mit $\beta = v/c$.

Bewegte sich dagegen der Empfänger mit der Geschwindigkeit v auf die Quelle *zu*, so registrierte er die Frequenz $f_Z = f(1+\beta)$.

Für Licht im Vakuum gibt es keinen Träger, der sich bewegen könnte, sondern nur die Relativbewegung zwischen Quelle und Empfänger. Also müssen die beiden Formeln für f_V und f_Z in eine einzige zusammenfallen, wenn man sie relativistisch korrekt abändert. Die Zeitdilatation bringt das zustande:

Bewegte Quelle: „Bewegte Uhren gehen langsamer" bedeutet hier, dass das Licht für den ruhenden Empfänger mit der *verkleinerten* Frequenz $f\sqrt{1-\beta^2}$ „tickt". In der Formel für f_V muss also f durch $f\sqrt{1-\beta^2}$ ersetzt werden. Dann erhalten wir

$$f_V = f\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = f\sqrt{\frac{(1+\beta)(1-\beta)}{(1-\beta)^2}}$$

oder $f_V = f\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$.

Bewegter Empfänger: „Bewegte Uhren gehen langsamer" bedeutet jetzt, dass die Sekunde für den Empfänger länger dauert. Er erhält also pro Sekunde mehr Schwingungen und misst statt f die *vergrößerte* Frequenz $f/\sqrt{1-\beta^2}$. In der Formel für f_Z ist demnach f durch $f/\sqrt{1-\beta^2}$ zu ersetzen. Damit erhalten wir

$$f_Z = f\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = f\sqrt{\frac{(1+\beta)^2}{(1+\beta)(1-\beta)}}$$

oder

$f_Z = f\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$, dieselbe Formel wie für f_V.

Die Relativgeschwindigkeit von Sender und Empfänger betrage *v*. Dann ist bei Annäherung die Empfangsfrequenz *k*-mal so groß wie die Sendefrequenz, mit

$$\boldsymbol{k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \text{und} \quad \beta = v/c.}$$

Entfernen sich Sender und Empfänger voneinander, so ist die Empfangsfrequenz der *k*-te Teil der Sendefrequenz.

Für sehr kleine Werte β sind übrigens alle drei „Dopplerfaktoren" k, der relativistische und die beiden nichtrelativistischen, nahezu gleich groß, da der Korrekturfaktor $\sqrt{1-\beta^2}$ dann sehr nahe bei 1 liegt, viel näher als die Zahlen $1 \pm \beta$ selbst.